

Arbeitsbericht Nr. 2

**Ein Zuordnungsmodell für Meßgeräte  
in Energie-Informations-Systemen**

von

Prof. Dr. Werner Kern

Dipl.-Kfm./Dipl.-Vw. Stephan Zelewski

2. Auflage des Arbeitsberichts 1/1985 am  
Seminar für  
Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und  
Fertigungswirtschaft

Köln 1985

Alle Rechte vorbehalten.

Universität zu Köln  
Seminar für Fertigungswirtschaft  
Arbeitsbericht 1/1985

Ein Zuordnungsmodell für Meßgeräte  
in Energie-Informations-Systemen

von Prof. Dr. Werner Kern und  
Dipl.-Kfm. Dipl.-Vw. Stephan Zelewski

<u>Inhalt</u>	<u>Seite</u>
Symbolverzeichnis	2
1 Das Realproblem - eine Skizze	5
2 Modellprämissen	8
2.1 Formulierung der Prämissen	8
2.2 Erläuterungen zu den Prämissen	10
3 Modellformulierung	14
4 Modellösung	17
4.1 Überblick und Komplexitätsproblematik	17
4.2 Ein Branch and Bound-Algorithmus	21
4.2.1 Die Eröffnungskomponente	21
4.2.2 Die Basiskomponente	24
4.2.3 Verbesserungskomponenten	27
4.2.3.1 Die erste Verbesserungskomponente	27
4.2.3.2 Die zweite Verbesserungskomponente	30
4.2.3.3 Die dritte Verbesserungskomponente	30
4.2.3.4 Die vierte Verbesserungskomponente	32
4.2.4 Eine Kombination von Verbesserungskomponenten	34
4.3 Zur Effizienz der Branch and Bound-Lösung	36
5 Modellerweiterungen	42
5.1 Umgebungsbezogene Modellerweiterung	42
5.2 Zielsystembezogene Modellerweiterung	45
5.3 Zeitbezogene Modellerweiterung	46
6 Probleme bei der Modellquantifizierung	51
Fußnoten	53

Symbolverzeichnis

Abkürzungen

ER	Entscheidungsraum
F	Ressourcenverzehr
IE	(intendierte) Entscheidungsalternativen
I	Informationsstand
LR	(möglicher(m), optimaler(o), zulässiger(z)) Lösungsraum
L	Länge der Problemspezifizierung
KMG	Klasse von Meßgerätearten
MG	Meßgerät
MK	Modellkomplexität
MO	Meßort
$N(e_h)$	Menge aller unmittelbaren Nachfolgeknoten zum Knoten für $e_h$
O	Ordnung (Rang) der relativen Effizienz
R	Restriktion
S	Schranke, obere
T	Anzahl der Perioden (der Nettonutzen-Schätzwert-Vorausschau nach den Perioden, die der Referenzperiode folgen
$T_A$	Zeitpunkt, zu dem die erste Messung durchgeführt werden kann
$T_E$	Zeitpunkt, vor dem die letzte Messung durchgeführt werden muß
U	Nettonutzen-Schätzfunktional
$V(e_h)$	Menge aller unmittelbaren Vorgängerknoten zum Knoten für $e_h$
VK	Verbesserungskomponente
$ANA(e_h)$	Knoten mit $e_h$ liegt vollständig analysiert vor
$NANA(e_h)$	Knoten mit $e_h$ liegt nicht vollständig analysiert vor
D	Definitionsbereich
N	natürliche Zahlen, Menge der
$N_0$	natürliche Zahlen einschließlich Null, Menge der
R	rationale Zahlen, Menge der
$a_{it}$	Anzahl verfügbarer Meßgeräte der Art in Periode t
ak	Knotenanzahl im Lösungsbaum, zugleich Anzahl der in der Basiskomponente berücksichtigten Entscheidungsmöglichkeiten
ak'	reduzierte Knotenanzahl im Lösungsbaum
az	Anzahl der zu extremierenden Zielfunktionen
d	Folgeknoten-Koeffizient
$e_h$	Entscheidungsalternative (-vektor), gewählte
f	konstanter Betrag
g	(0-1)-Parameter zur Abbildung der Zugehörigkeit von MG zu MGK
mk	Maß der Modell-Komplexität
$P_t$	Teilperiode t
q	Diskontierungsfaktor $(1 + p/100)$
t	Zeitpunkt des Beginns eines Teil-(zeit-)intervalls
u	Nettonutzen-Schätzfunktion
$u_h$	Nettonutzen (eindimensionaler) der Entscheidungsalternative h (redefiniert)
$u_{ij}$	Nettonutzen (zweidimensionaler) einer Zuordnung von i zu j
$\hat{u}$	Nettonutzen-Schätzfunktion, modifizierte
$\Delta u_{OZ}$	Zunahme des Nettonutzen-Schätzwertes (mittels Kantenbewertung)
$x_{ij}$	Zuordnungsvariable von $MG_i$ zu $MO_j$
y	Anzahl der Folgeknoten
z	Zielkriterium
$\hat{z}$	Zielkriterium, modifiziertes

Indizes

b	Perioden, die auf die (Referenz-)Periode folgen, in der über Zuordnung entschieden wurde
c	Perioden, die der (Referenz-)Periode vorangehen, in der über Zuordnung entschieden wurde
h	Entscheidungsalternative, gewählte
i	Meßgeräteart
j	möglicher Meßort
l	Meßgeräte-Artenklasse
m	Meßgerätearten, Anzahl der
n	(möglichen) Meßorte, Anzahl der
r	redefinierter Index für die Kombination ij
s	ausgezeichnete Entscheidungsperiode
t	Zeitintervall
τ	Informationsstand
v	Klassen von Meßgerätearten, Anzahl der
w	Anzahl (m.n) der Indexart r oder: Anzahl (m.n) der Ausprägungen des Index r
w'	reduzierte Anzahl der Indexart r oder: reduzierte Anzahl der Ausprägungen des Index r
E	Eröffnungslösung
R	Referenzlösung
Q	Quellknoten
Z	Zielknoten
*	optimal oder intendiert

Der Ausdruck  $(d_A, d_O, d_E)$  wird als eine übliche Kurzschreibweise für Indextmengen gebraucht, und zwar für die (geordnete) Menge

$$M = (d \mid d \in N_O \wedge d_A \leq d \leq d_E \wedge [(d' = N(d)) \rightarrow (d' - d = d_O)] )$$

Deren Elemente  $d$  sind in ascendenter Reihenfolge angeordnet.  
Dabei ist  $d' = N(d)$  das unmittelbare Nachfolgeelement des Referenzelementes  $d$ .

Zeichen

$\Sigma$	Summe über ...
$\{ \}$	Menge von ...
$\emptyset$	leere Menge
$\setminus$	Restmenge von ... (alle die in (A), aber nicht in (B) sind)
$\subset$	als Teilmenge von ...
$\in$	als Element von ...
$\notin$	als kein Element von ...
$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$\geq$	gleich oder größer als ...
$\leq$	gleich oder kleiner als ...
$>$	größer als ...
$<$	kleiner als ...
$\wedge$	logisch "und"
$\vee$	logisch "oder"
$\bigwedge$	für alle ...
$\bigvee$	für mindestens ein ...
$\rightarrow$	leitet (allgemein) über zu ...
$\mapsto$	wird zu ...
$\Leftrightarrow$	äquivalent zu ... (Zuordnung ist immer wahr)
$\longleftrightarrow$	äquivalent zu ... (Zuordnung kann auch falsch sein)
$[ [$	rechts offenes Intervall
$:=$	(Index) wird gesetzt auf
$\hat{=}$	entspricht

## 1. Das Realproblem - eine Skizze

Jede auf rationelle Energieverwendung bedachte innerbetriebliche Energiebewirtschaftung bedarf vielfacher Informationen, und zwar über Soll- als auch über Istzustände und -durchsätze. Durch ein Vergleichen der Ist- mit den ihnen entsprechenden Sollgrößen lassen sich vorhandene Schwachstellen erkennen und durch deren Beseitigung Energieeinsparungen realisieren. Allerdings müssen die zu ergreifenden Maßnahmen durch die Einsparerfolge gerechtfertigt werden. Das Fixieren der Sollgrößen stellt wegen seiner energie-technisch-konzeptionellen Orientierung in erster Linie ein ingenieurwissenschaftliches Problem dar. Ein Gleiches könnte auch für die Ermittlung der Istgrößen postuliert werden, wenn sich hierbei nicht zugleich auch wirtschaftliche Fragen stellen würden. Diese zielen darauf ab, in welchem örtlichen und zeitlichen Differenzierungsgrad die zahlreichen verschiedenen Istgrößen gemessen und ausgewertet werden sollen. Dabei ist davon auszugehen, daß mit jeder Meßstelle und jedem Ablesen eines Meßwertes Aufwendungen (Kosten) verbunden sind. Jede Intensivierung der Überwachung von betrieblichen Energiepotentialen und -flüssen führt deshalb zu steigenden Überwachungskosten. Die ihnen gegenüber zu stellenden Einsparpotentiale werden mit zunehmender Überwachungsintensität und den aus ihr resultierenden Einsparwirkungen erfahrungsgemäß einer Sättigungsfunktion folgen, so daß die Grenzerfolge einer zunehmenden Überwachungsintensität sinken, irgendwann einmal Null und danach sogar negativ werden werden. Es ist zu vermuten, daß bereits vor der kritischen Grenze ein Optimum erreicht werden kann. Es wird dadurch beschrieben, daß bei ihm die Differenz zwischen dem Überwachungsnutzen und dem jeweils realisierten Überwachungsaufwand ein Maximum ist. Dieses Optimum operationsanalytisch-quantitativ, zugleich aber fallbezogen (individuell) zu ermitteln und die ihm entsprechende Konstellation der zweckmäßigen Meßstellen im Betrieb und der einzusetzenden Meßgerätearten (in Verbindung mit ihnen Meßhäufigkeiten und Auswertungsformen) zu fixieren, dient das nachfolgend konzipierte Modell. Es soll den um eine rationelle Energiebewirtschaftung bemühten Organen Hinweise auf die jeweils zweckmäßigste Konfiguration des zu installierenden Meßsystems geben. Dabei gilt, daß sowohl zu wenig als auch zu viel Informationsgewinnung vermieden werden müssen.

Abgesehen davon, daß eigentlich fast jede Energieerzeugungs-/versorgungsanlage bereits mit - irgendwelchen - Meßgeräten zur Zustands- und Durchsätzeerfassung herstellerseitig ausgerüstet sind und auch viele Energieverbraucher, zumindest größere, über entsprechende Geräte verfügen, kann, wie empirische Untersuchungen ergaben, davon ausgegangen werden, daß diese Konfigurationen sowohl nach Meßorten als auch nach den Arten der Meßdatenerfassung jeweils nur Mindestlösungen darstellen. Viele für eine Energiebewirtschaftung bedeutsame Informationen werden oft nicht gemessen, sondern bestenfalls geschätzt oder retrograd ermittelt. Aufzeichnungen von Energieverbräuchen zeitgleich mit den sie bestimmenden Produktionssituationen und -mengen finden sich fast gar nicht. Der Verzicht auf ein Gewinnen solcher betriebswirtschaftlich relevanten Informationen, welche zu den sogenannten Verbrauchsfunktionen führen, müßte zumindest kalkülhaft begründet werden. Auch dies ließe sich mit dem intendierten Modell eventuell erreichen.

Das in ihm abzubildende Realproblem soll beispielhaft aus einem - stark vereinfachten - Energieflußschema einer Papierfabrik, und zwar umfassend die Energiearten Strom, Dampf, Wasser und Trockenluft, abgeleitet werden. In dem einem solchen Produktionssystem zugeordneten Informationssystem lassen sich an jedem nur denkbaren (Meß-) Ort im Sinne eines potentiellen Kontrollpunktes unterschiedliche Meßdaten mit unterschiedlichen Meßhäufigkeiten und Meßdatenfixierungen, d. h. mit informationsspezifisch konstruierten Meßgeräten, feststellen. Solche Meßdaten wären z. B.

- für Strom: Spannung, Frequenz, beanspruchte Leistung, bezogene Arbeit,
- für Dampf und Wasser: Druck, Temperatur, Durchsatzmengen,
- für Luft: Druck, Temperatur, Feuchte, Durchsatzmengen,

aber auch Drehzahlen, Ölstände, Emissionswerte u. a. m. Die infrage kommenden Meßgerätearten (-klassen) sind deshalb nach diesen Medien und Meßgrößenarten zu differenzieren, jedoch zusätzlich noch danach, ob sie intermittierend oder kontinuierlich messen, ob sie nur Zustände anzeigen, kumulierend zählen und/oder die Meßdaten auch protokollieren (registrieren). Bauart, Meßgenauigkeit und Sensibilität, Anzeigen- und Datenausgabeart sind weitere Differenzierungskriterien.

Für ihre Implementierung lassen sich die potentiellen Kontrollpunkte in der Regel auf diejenigen Stellen im System beschränken, die unmittelbar vor oder nach, eventuell aber auch innerhalb einer Energieumsetzungsstufe liegen. Solche Stufen sind z. B. Speisewasservorwärmer, Dampfkessel, Überhitzer, Kamin, Turbine, aber auch die Aggregate der Papieraufbereitung und die Papiermaschine selbst. Aufgrund dieser Charakterisierung läuft die Modellierungsaufgabe auf die Bildung des folgenden Formalproblems hinaus: Den  $j = 1, 2, \dots, n$  potentiellen Meßorten  $MO_j$  (Kontrollpunkten) ist für jede dort relevante Energieart und jede energieartspezifische Meßgrößenart kein oder höchstens ein Meßgerät zuzuordnen. Diese Meßgeräte gehören zunächst bestimmten Klassen  $l = 1, 2, \dots, v$  an (z. B. Manometer zur Druckmessung). Innerhalb einer jeden Klasse gibt es jedoch noch verschiedene Bauarten  $i = 1, 2, \dots, m$  (z. B. Meßbereich bis 5 bar, permanent anzeigend und registrierend). Folglich ist die Zuordnung dahingehend zu spezifizieren, daß jedem Meßort  $j$  zum einen von jeder Meßgeräteart  $i$  höchstens ein Gerät und daß zum andern auch aus jeder Klasse  $l$  von Meßgerätearten höchstens eine Geräteart zugewiesen werden darf. Als Ziel möge es ausreichen, die Summe aller Nettonutzen zu maximieren, die einer jeden lösungsimmanenten Paarung von  $i$  und  $j$  - durch ex ante-Schätzungen - zugewiesen werden. Eine jede zulässige Lösung - nicht nur die optimale - charakterisiert sodann bereits ein dem als gegeben unterstellten Energie-Versorgungssystem (EVS) zugeordnetes (spezifisches) Energie-Informationssystem (EIS).



## 2 Modellprämissen

### 2.1 Formulierung der Prämissen

(P<sub>1</sub>:) Das zu entwickelnde Meßsystem wird charakterisiert:

- durch eine bipartite Menge von Systemelementen,  
und zwar

= einerseits m Meßgerätearten MG<sub>i</sub> mit der Index-  
menge (1, 1, m) und m ≥ 1,

= andererseits n Meßorten MO<sub>j</sub> mit der Indexmenge  
(1, 1, n) und n ≥ 1,

- durch zwei über der Menge der Systemelemente  
(und den reellen Zahlen) definierte Funktionen  
(als Spezialfällen des allgemeineren Begriffs  
der Systemrelationen), und zwar:

= einerseits die zweistellige Zuordnungsfunktion x  
mit:

$$x: \{MG_i | i \in (1, 1, m)\} \times \{MO_j | j \in (1, 1, n)\} \rightarrow \{0; 1\}$$

$$(MG_i, MO_j) \mapsto x(MG_i, MO_j) = x_{ij}$$

$$\text{mit: } x_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{genau dann, wenn (genau) ein} \\ & \text{Meßgerät der Meßgeräteart } MG_i \\ & \text{dem Meßort } MO_j \text{ zugeordnet ist} \\ 0: & \text{genau dann, wenn kein Meßgerät} \\ & \text{der Meßgeräteart } MG_i \text{ dem Meßort} \\ & MO_j \text{ zugeordnet ist} \end{cases}$$

= andererseits die zweistellige Nettonutzen-Schätzfunktion  
u mit:

$$u: \{MG_i, i \in (1, 1, m)\} \times \{MO_j, j \in (1, 1, n)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(MG_i, MO_j) \mapsto u(MG_i, MO_j) = u_{ij}$$

(P<sub>2</sub>:) Jedem Meßort kann von jeder Meßgeräteart höchstens ein  
Meßgerät zugeordnet werden.

(Diese Prämisse ist implizit in der Definition der  
Zuordnungsfunktion x von Prämisse P<sub>1</sub> enthalten.)

(P<sub>3</sub>:) Außerdem existieren v verschiedene Klassen von Meßgeräte-  
arten KMG<sub>1</sub> mit der Indexmenge (1, 1, v) und 1 ≤ v ≤ m. Sie  
resultieren aus einer (vollständigen und disjunkten) Zer-  
legung der Menge aller Meßgerätearten. Diese Zerlegung  
wird durch die charakteristischen Funktionen g<sub>1</sub> definiert;

für sie gilt jeweils:

$$g_1: \{MG_i \mid i \in (1,1,m)\} \longrightarrow \{0; 1\}$$

$$(MG_i) \rightarrow g_1(MG_i) = g_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{genau dann, wenn } MG_i \in KMG_1 \\ 0 & \text{genau dann, wenn } MG_i \notin KMG_1 \end{cases}$$

(P<sub>4</sub>):) Jedem Meßort kann aus jeder Klasse von Meßgerätearten höchstens eine Meßgeräteart zugeordnet werden.

(P<sub>5</sub>):) Von jeder Meßgeräteart MG<sub>i</sub> stehen genau a<sub>i</sub> Meßgeräte zur Verfügung mit a<sub>i</sub> ∈ ℕ, und zusätzliche Anschaffungen sind nicht vorgesehen.

(P<sub>6</sub>):) Einstufigkeit: Es muß genau eine Entscheidung über die Ausprägung aller (Bilder) x<sub>ij</sub> in der Zuordnungsfunktion getroffen werden; deren mögliche Wechselwirkungen mit vor- und nachgelagerten Entscheidungen werden nicht beachtet.

(P<sub>7</sub>):) Einperiodizität: Die für den Nettonutzen relevanten Auswirkungen der zu treffenden Entscheidung werden nur für eine einzige Entscheidungsperiode erfaßt. Für diese Periode wird unterstellt,

- daß alle Wirkungen entweder zum selben (aber beliebigen) Zeitpunkt innerhalb der Entscheidungsperiode auftreten
- oder daß sie sich zwar zu unterschiedlichen Zeitpunkten bemerkbar machen, die Differenzen zwischen diesen Zeitpunkten aber vernachlässigt werden können.

(P<sub>8</sub>):) Als monodimensionales Formalziel"system" findet nur das Zielkriterium der ungewichteten Nettonutzen-Schätzwertsumme Anwendung. Diese Größe ist zu maximieren (Zielrichtung), und zwar nur innerhalb der einen betrachteten Entscheidungsperiode (zeitlicher Rahmen der Zielverwirklichung). Sie ist das Bild der m·n-stelligen Nettonutzen-Schätzwertsummenfunktion z. Für diese gilt mit u<sub>ij</sub> als konstanten Werten in dieser Funktion:

$$z: (\{0; 1\}^m)^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_{ij} \mid i \in (1,1,m) \wedge j \in (1,1,n)) \longmapsto z((x_{ij} \mid i \in (1,1,m) \wedge j \in (1,1,n))) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot x_{ij}$$

Für Zuordnungsmöglichkeiten x<sub>ij</sub>, die von vornherein ausgeschlossen werden sollen (z. B. Temperaturmeßgeräte an elektrischen Leitungen), sind - hinreichend große - negative Werte u<sub>ij</sub> anzusetzen.

(P<sub>9</sub>:) Die Separationsprämisse besagt, daß jedem Zuordnungstupel  $(MG_i, MO_j)$  ein Nettonutzen-Schätzwert  $u_{ij}$  verursachungsgerecht und eindeutig zugerechnet werden kann. Es wird nämlich angenommen, daß sich die Nettonutzenschätzung für die betrachtete Zuordnungsentscheidung von allen übrigen Zuordnungsentscheidungen separiert erfassen läßt.

(P<sub>10</sub>) Mit der Informationsprämisse wird vorausgesetzt, daß die konkreten Ausprägungen folgender Modellkonstituenten vor Beginn der Modellösung bekannt sind:

- Anzahl  $m$  der Meßgerätearten,
- Anzahl  $n$  der Meßorte,
- Anzahl  $v$  der Meßgeräteartenklassen,
- Art der Zuordnung der Menge aller Meßgerätearten auf die Meßgeräteartenklassen  $l$  in Gestalt der  $v$  charakteristischen Funktionen  $g_l$ ,
- Anzahlen  $a_i$  der Meßgeräte für jede Meßgeräteart,
- Nettonutzen-Schätzfunktion  $u$  (oder die Menge ihrer (Bilder)  $u_{ij}$ ).

## 2.2 Erläuterungen zu den Prämissen

zu Prämisse P<sub>1</sub>:

- Die (Bilder)  $x_{ij}$  der Zuordnungsfunktion  $x$  stellen die Entscheidungsvariablen des - als Entscheidungsmodell interpretierten - Zuordnungsmodells dar.
- Die (Bilder)  $u_{ij}$  der Nettonutzen-Schätzfunktion  $u$  kennzeichnen Nettonutzen-Schätzwerte. Diese resultieren jeweils aus derjenigen Differenz von geschätztem Bruttonutzen und geschätzten Kosten, die von der Entscheidung, (genau) ein Meßgerät der  $MG_i$  dem Meßort  $MO_j$  zuzuordnen, vermutlich verursacht werden würde.
- Jede konkrete Ausprägung der  $m \cdot n$ -Matrix  $X$  mit den Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  als Koeffizienten stellt eine Entscheidungsalternative  $e$  des Zuordnungsmodells dar. Diese Entscheidungsalternativen sind notwendigerweise:
  - = disjunkt, d. h. die Wahl einer Entscheidungsalternative  $e$  schließt die Wahl einer von ihr abweichenden Entscheidungsalternative  $e'$  aus. (Aus  $e \neq e'$  folgt nämlich, daß für mindestens ein Zuordnungstupel  $(MG_i, MO_j)$  gelten muß:  $x_{ij} \neq x'_{ij}$ .)

= exhaustiv, d. h. es gibt im abgesteckten Prämissenrahmen keine Entscheidungsalternative, die nicht schon durch eine Entscheidungsalternative e im Zuordnungsmodell symbolisch repräsentiert wäre.

Die Menge aller kombinatorisch möglichen Entscheidungsalternativen wird als Entscheidungsraum ER bezeichnet. Für ihn gilt - aufgrund der Kombinatorik aller Zuordnungen -:

$$ER = \mathbb{D}(X) = (\{0; 1\}^m)^n = \{0; 1\}^{m \cdot n}$$

In dieser Formulierung bezeichnet der Ausdruck  $\mathbb{D}(g)$  den Definitionsbereich der Variablen g.

zu Prämisse P<sub>2</sub>:

Es wird unterstellt, daß eine Meßgeräteredundanz, falls mehrere Meßgeräte derselben Meßgeräteart am selben Meßort installiert wurden, keinen Zusatz(netto)nutzen gegenüber der einfachen Meßgeräteausstattung eines Meßortes aufweisen kann. Eine ggf. denkbare höhere Störfallflexibilität durch redundante Reservemeßgeräte wird z. B. vernachlässigt.

Eine Relaxation (Abschwächung) der Prämisse P<sub>2</sub> wäre möglich, wenn als Nachbereich der Zuordnungsfunktion x die Binärmenge  $\{0; 1\}$  durch die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ersetzt würde. Wenn dann  $x_{ij} = g \in \mathbb{N}_0$  sein würde, so bedeutete dies, daß dem Meßort MO<sub>j</sub> genau g Meßgeräte der Art MG<sub>i</sub> zugeordnet werden.

zu Prämisse P<sub>3</sub>:

Alle Meßgerätearten derselben Klasse von Meßgerätearten (z. B. für Temperatur) lassen sich in der Weise interpretieren, daß sie zwar dieselbe meßtechnische Funktion erfüllen, dies aber qualitativ unterschiedlich bewirken: Sie dienen eben der Ermittlung derselben Meßdatenart, doch kann diese je nach Meßgeräteart mit unterschiedlicher Meßgenauigkeit, -häufigkeit, -geschwindigkeit usw. als Einflußgrößen auf die Bruttonutzen-Schätzwerte und mit verschiedenen Meßkosten-Schätzwerten erhoben werden. Auf diese Weise würde es möglich, Unterschiede der Meß- oder Datenqualität im Zuordnungsmodell abzubilden und Meßqualitäten durch eine Entscheidung über die zuzuordnende Meßgeräteart zur Disposition zu stellen.

zu Prämisse P<sub>4</sub>:

- Analog zu Prämisse P<sub>2</sub> wird unterstellt, daß die Ermittlung derselben Meßdatenart durch Installation zusätzlicher, aber qualitativ unterschiedlicher Meßgerätearten keinen Zusatz(netto)nutzen gegenüber ihrer Ermittlung durch nur eine Meßgeräteart stiftet. (Dabei wird angenommen, daß dem Nettonutzenvergleich als einzelne Meßgeräteart jeweils diejenige zugrundegelegt wird, die in der verglichenen Klasse von Meßgerätearten den höchsten Nettonutzen aufweist)

- Jedem Meßort können durchaus mehrere Meßgeräte zugeordnet werden, sofern sie als Vertreter von Meßgerätearten aus verschiedenen Klassen von Meßgerätearten unterschiedliche Meßdatenarten (z.B. Druck und Temperatur) ermitteln sollen.
- Maximal könnten jedem Meßort somit  $v$  verschiedene Meßgeräte zugeordnet werden. Im degenerierten Fall  $v = 1$  für jedes  $x_{ij}$  fällt die Prämisse  $P_4$  mit der Prämisse  $P_2$  zusammen. Im entgegengesetzten Fall  $v = m$  würde jedem Meßort von jeder Meßgeräteart ein Meßgerät zugeordnet werden können.

zu Prämisse  $P_5$ :

- Wenn von einer Meßgeräteart  $MG_i$  mindestens 2 Meßgeräte zur Verfügung stehen ( $a_i \geq 2$ ), können Meßgeräte derselben Art auch verschiedenen Meßorten zugeordnet werden.
- Im degenerierten Fall  $a_i = 1$  für alle  $i \in (1, 1, m)$  verliert die Prämisse  $P_2$  ihre Bedeutung.

zu Prämisse  $P_6$ :

Mit der Prämisse der Einstufigkeit sollen Abhängigkeiten einer Zuordnung von früher realisierten oder später (eventuell noch) zu realisierenden Lösungen ausgeschlossen werden. Das Modell zielt somit nicht auf Interimslösungen hin.

zu Prämisse  $P_7$ :

Die Prämisse der Einperiodizität setzt voraus,

- daß entweder eine Entscheidung nur innerhalb einer einzelnen Periode zu nettonutzenrelevanten Auswirkungen führt (Dabei kann die Periode höchstens so lang bemessen sein, wie die u. U. auftretenden Zeitdifferenzen zwischen den Zeitpunkten, in denen diese Auswirkungen anfallen, vom Entscheidungsträger vernachlässigt werden können.)
- oder daß die nettonutzenrelevanten Auswirkungen in der betrachteten Periode als repräsentativ für alle Perioden des Entscheidungszeitraums betrachtet werden.

zu Prämisse  $P_8$ :

Die Bestimmung der Nettonutzen-Schätzwerte  $u_{ij}$  für das Zielkriterium stellt ein gesondertes informatorisches Problem dar (s.a. Prämisse  $P_1$ ). Eine Möglichkeit besteht z. B. darin, den Bruttonutzen eines Zuordnungstupels ( $MG_i, MO_j$ ) aus der Differenz zwischen dem am Meßort vermuteten effektiven Energieverbrauch und dem mittels technischer Verbrauchsfunktionen zu bestimmenden

Sollverbrauch, bewertet mit den jeweils geltenden spezifischen Energiewerten, herzuleiten.

zu Prämisse P<sub>9</sub>:

Eine realistischere Fassung dieser recht abstrakten Separationsprämisse bedingt eine nicht unwesentliche Modellerweiterung und unterbleibt deshalb vorerst. Vgl. zu der Erweiterungsmöglichkeit Abschnitt 5.1.

zu Prämisse P<sub>10</sub>:

Die Informationsprämisse ist modelltheoretisch eine Selbstverständlichkeit, obwohl sie im Falle von Realproblemen oftmals nicht erfüllt wird. Bezüglich der Elemente  $u_{ij}$  wird auf die Erläuterungen zur Prämisse P<sub>8</sub> verwiesen.

### 3 Modellformulierung

Die  $m \cdot n$  Restriktionen  $R_{0ij}(x_{ij})$  oder die aus  $m \cdot n$  Teilrestriktionen bestehende Restriktion  $R_0(e_h)$  mit den Indexmengen  $(1,1,m)$  und  $(1,1,n)$  bzw.  $(1,1,m \cdot n)$  legen fest, daß die Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  binärer Art sind:

$$R_{0ij}(x_{ij}) : \Leftrightarrow x_{ij} \in \{ 0; 1 \}$$

Die gleiche Aussage enthält die folgende, an den Entscheidungsalternativen  $e_h$  orientierte Notation (Formulierung):

$$R_0(e_h) : \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in (1,1,m)} \bigwedge_{j \in (1,1,n)} e_h \in (\{0; 1\}^{m \cdot n})$$

Die  $m$  (kapazitätsorientierten) Restriktionen  $R_{1i}((x_{ij} | j \in (1,1,n)))$  oder die eine aus  $m$  Teilrestriktionen bestehende Restriktion  $R_1(e_h)$  drücken aus, daß von einer Meßgeräteart  $MG_i$  nicht mehr Meßgeräte zugeordnet werden können, als insgesamt von ihr zur Verfügung stehen:

$$R_{1i}((x_{ij} | j \in (1,1,n))) : \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$$

oder

$$R_1(e_h) : \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in (1,1,m)} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$$

Die  $v \cdot n$  Restriktionen  $R_{2lj}((x_{ij} | i \in (1,1,m)))$  oder die eine aus  $v \cdot n$  Teilrestriktionen bestehende Restriktion  $R_2(e_h)$  bestimmen, daß an jedem Meßort  $MO_j$  höchstens nur ein Meßgerät aus jeder Klasse von Meßgerätearten  $KMG_l$  zugeordnet werden kann:

$$R_{2lj}((x_{ij} | i \in (1,1,m))) : \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m x_{ij} \cdot g_{li} \leq 1$$

oder

$$R_2(e_h) : \Leftrightarrow \bigwedge_{l \in (1,1,v)} \bigwedge_{j \in (1,1,n)} \sum_{i=1}^m x_{ij} \cdot g_{li} \leq 1$$

Wird die an den Entscheidungsalternativen  $e_h$  orientierte Notation (Formulierung) der Restriktionen  $R_0(e_h)$ ,  $R_1(e_h)$  und  $R_2(e_h)$  gewählt, so muß zur formalen Konsistenz noch die (zweifache) Restriktion  $R_3(e_h)$  gefordert werden; sie vermittelt zwischen den Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  und den Entscheidungsalternativen  $e_h$ :

$$R_3(e_h) : \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \bigwedge_{h \in (1,1,m \cdot n)} \bigwedge_{h' \in (1,1,m \cdot n)} \\ \bigwedge_{h \neq h'} \left( (x_{ij} | i \in (1,1,m) \wedge j \in (1,1,n)) \in \{0,1\}^{m \cdot n} \right) \right] \wedge \\ \left[ \begin{array}{l} e_h = (x_{ij} | i \in (1,1,m) \wedge j \in (1,1,n)) \\ h \neq h' \leftrightarrow e_h \neq e_{h'} \end{array} \right]$$

Die Zielfunktion  $z$  ist vorgegeben für alle Entscheidungsalternativen  $e_h$  aus dem durch die Restriktionen vom Typ  $R_0(e_h)$  implizit definierten Entscheidungsraum ER, und zwar definiert durch die Prämisse  $P_8$  als:

$$z: (\{0; 1\}^m)^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_{ij} \mid i \in (1,1,m) \wedge j \in (1,1,n)) \longmapsto$$

$$\mapsto z((x_{ij} \mid i \in (1,1,m) \wedge j \in (1,1,n))) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot x_{ij}$$

oder

$$e_h \longmapsto z(e_h) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot x_{ij}$$

Unter Berücksichtigung des Maximierungsoperators für das Zielkriterium der Nettonutzen-Schätzwertesumme ergibt sich als Menge IE der intendierten Entscheidungsalternativen  $e^*$  für die Lösung des Zuordnungsmodells:

$$IE = \left\{ e_h^* \mid R_0(e_h^*) \wedge R_1(e_h^*) \wedge R_2(e_h^*) \wedge R_3(e_h^*) \wedge \bigwedge_{\{e_h \mid R_0(e_h) \wedge \dots \wedge R_3(e_h)\} \setminus \{e_h^*\}} z(e_h^*) \geq z(e_h) \right\}$$

Diese Alternativenmenge kann durchaus auch null- oder mehr-elementig sein. Der Raum kombinatorisch möglicher Modelllösungen mLR (kurz: möglicher Lösungsraum) des Zuordnungsmodells ist identisch mit der Menge sämtlicher kombinatorisch möglichen Entscheidungsalternativen  $e_h$  in Gestalt des Entscheidungsraums ER:

$$mLR = ER = (\{0; 1\}^m)^n$$

Der Teilraum zulässiger Modelllösungen zLR (kurz: zulässiger Lösungsraum des Zuordnungsmodells ist die Menge aller möglichen Entscheidungsalternativen, die sämtliche Restriktionen der Typen  $R_0$ ,  $R_1$  und  $R_2$  dieses Modells erfüllen:

$$zLR = \{ e_h \mid e_h \in mLR \wedge R_0(e_h) \wedge R_1(e_h) \wedge R_2(e_h) \wedge R_3(e_h) \}$$

Da der redundante Restriktionstypus  $R_0(e_h)$  durch  $e_h \in mLR$  notwendig erfüllt ist, gilt auch einfacher:

$$zLR = \{ e_h \mid e_h \in mLR \wedge R_1(e_h) \wedge R_2(e_h) \wedge R_3(e_h) \}$$

oder

$$zLR = \{ e_h \mid R_0(e_h) \wedge R_1(e_h) \wedge R_2(e_h) \wedge R_3(e_h) \}$$

Der Teilraum optimaler Modellösungen oLR (kurz: optimaler Lösungsraum) ist die Menge sämtlicher zulässigen Entscheidungsalternativen, welche die Zielfunktion  $z$  maximieren und daher mit der Menge IE der intendierten Entscheidungsalternativen identisch sind:

$$\text{oLR} = \{ e_h^* \mid e_h^* \in \text{zLR} \wedge \bigwedge_{e_h \in \text{zLR} \setminus \{e_h^*\}} z(e_h^*) \geq z(e_h) \} = \text{IE}$$

Die vorstehend entwickelte Modellformulierung läßt sich - gestützt auf den Programmansatz der linearen gemischt-ganzzahligen Optimierungsrechnung - in der nachstehenden Kurzfassung abbilden:

$$(z:) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \max!$$

$$(R_1:) \quad \bigwedge_{i \in (1,1,m)} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$$

$$(R_2:) \quad \bigwedge_{l \in (1,1,v)} \bigwedge_{j \in (1,1,n)} \sum_{i=1}^m x_{ij} \cdot g_{li} \leq 1$$

$$(R_0:) \quad \bigwedge_{i \in (1,1,m)} \bigwedge_{j \in (1,1,n)} x_{ij} \in \{0; 1\}$$

(R<sub>3</sub>:) entfällt bei der an den Entscheidungsvariablen orientierten Notation

## 4 Modellösung

### 4.1 Überblick und Komplexitätsproblematik

Das Ergebnis der Formulierung des Zuordnungsmodells ist ein linear-binäres Entscheidungsmodell. Zu dessen Lösung steht eine große Anzahl von Algorithmen seitens des Operations Research zur Verfügung. Verwiesen sei beispielsweise auf

- den additiven Algorithmus von Balas samt mehrerer Fortentwicklungen<sup>1)</sup>,
- den Kolesar-Algorithmus<sup>2)</sup> oder
- Algorithmen auf der Grundlage des Funktionalgleichungsprinzips von Bellman aus der dynamischen Optimierungrechnung<sup>3)</sup>,
- Algorithmen auf der Grundlage des Branch and Bound-Prinzips<sup>4)</sup> sowie
- weitere Algorithmen<sup>5)</sup>.

Bei der Bewältigung von Zuordnungsmodellen für reale Gestaltungsprobleme wie beispielsweise einer Meßgerätezuordnung leiden die meisten dieser Verfahren jedoch darunter, daß bei ihrer Anwendung der Aufwand zur Algorithmenausführung mit der Modellgröße sehr rasch anwächst und schon bei sehr einfachen Realproblemen prohibitiv wirken kann.

Die Komplexität des vorstehend entwickelten Zuordnungsmodells kann gemessen und dargestellt werden mittels

- der Anzahl der Entscheidungsvariablen,
- der Anzahl der Zustandsvariablen,
- der Anzahl der Restriktionen,
- der Anzahl der Zielfunktionen,
- eines ordinal skalierten Maßstabs für die Schwierigkeit, mit der - im Sinne dieses Maßstabs - die schwierigste Restriktions- oder Zielfunktionsgestalt rechentechnisch gehandhabt werden muß.

Das für ein Energie-Informationen-System (EIS) intendierte Zuordnungsmodell wird hinsichtlich seiner Komplexität im wesentlichen bestimmt durch

- die Anzahl  $m$  der berücksichtigten Meßgerätearten,
- die Anzahl  $n$  der erfaßten Meßorte und
- die Anzahl  $v$  der gebildeten Klassen von Meßgerätearten.

Die Modellkomplexität variiert nämlich nur in Abhängigkeit von diesen drei Determinanten. So umfaßt das Zuordnungsmodell

- $m \cdot n$  Entscheidungsvariable  $x_{ij}$  und
- insgesamt  $(m+v) \cdot n + m$  Restriktionen, differenziert nach
  - =  $m \cdot n$  Restriktionen vom Typ  $R_{0ij}$ ,
  - =  $m$  Restriktionen vom Typ  $R_{1i}$  sowie
  - =  $v \cdot n$  Restriktionen vom Typ  $R_{2lj}$

Dagegen üben einen konstanten Einfluß auf die Modellkomplexität die Umstände aus, daß das Zuordnungsmodell

- keine Zustandsvariablen enthält,
- genau eine Zielfunktion umfaßt und
- alle Restriktionen sowie die Zielfunktion gemischt-ganzzahliger und linearer Gestalt sind.

Infolge der Linearität aller involvierten Funktionen könnte das Zuordnungsmodell rechen-technisch prima facie leicht gehandhabt werden. Die Ganzzahligkeit der Entscheidungsvariablen, die sich als Unstetigkeit der Restriktionen und Zielfunktion auswirkt, führt jedoch zu einer erheblichen Erschwernis bei der Anwendung von Lösungsalgorithmen auf das Zuordnungsmodell.

Ob solche Lösungsalgorithmen noch mit wirtschaftlich vertretbarem Aufwand auf das Zuordnungsmodell angewendet werden können, läßt sich allgemeingültig nicht entscheiden. Die Antwort hängt vielmehr ab von:

- der Modellkomplexität  $MK$ , die durch die dreistellige Funktion  $mk$  in der Gestalt von 2-Tupeln für die Entscheidungsvariablen- und Restriktionsanzahl gemessen werden kann mit:

$$\begin{array}{lcl} mk: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ & (m,n,v) & \longmapsto mk(m,n,v) = (m \cdot n; (m+v) \cdot n + m) = MK \end{array}$$

- dem (algorithmusspezifischen) Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf, der als eine Funktion der Modellkomplexität  $MK$  ausgedrückt werden kann und bei der hier maßgebenden gemischt-ganzzahligen Modellformulierung im Rahmen der Komplexitätstheoretischen worst case-Analyse nur exponentiell beschränkt ist, sowie
- der Verfügbarkeit an Rechenzeit und Speicherplätzen, welche ein Anwender des EIS-Zuordnungsmodells zugestehen kann und willens ist.

Insbesondere die zuletzt genannte Determinante verhindert durch ihre anwenderspezifischen Ausprägungsmöglichkeiten eine allgemeine Antwort auf die Frage, ob das EIS-Zuordnungsmodell mit

wirtschaftlich vertretbarem Aufwand zur Lösung des Meßgerätearten-Meßorte-Zuordnungsproblems eingesetzt werden könne.

Tendenziell läßt sich jedoch wegen der nur exponentiellen Beschränkung des Ressourcenbedarfs von Lösungsalgorithmen für gemischt-ganzzahlige Entscheidungsmodelle feststellen, daß deren Anwendung - zumindest in Bezug auf "pathologische" Modellvarianten - mit zunehmenden Beträgen der die Komplexität determinierenden Anzahlen  $m$ ,  $n$  und  $v$  relativ schnell an die Grenzen wirtschaftlicher Vertretbarkeit stößt.

Eine einfache Abschätzung mag diesen Sachverhalt verdeutlichen: Es sei angenommen, die Rechenzeit  $t$  eines solchen Lösungsalgorithmus werde ausschließlich von der Anzahl der Entscheidungsvariablen beeinflusst, und sie sei diesbezüglich durch die Funktion  $t_{\max} = f(m,n) = 2^{m \cdot n}$  nur exponentiell beschränkt.

Als Ausgangspunkt diene ein trivialer Ausschnitt aus einer betrieblichen Produktionsstruktur; diese möge nur  $m = 3$  Meßgerätearten und  $n = 22$  Meßorte umfassen. Die Rechenzeit zur Lösung dieses Teilmodells beträgt maximal  $t_{\max} = f(3, 22) = 2^{3 \cdot 22} \approx 7,4 \cdot 10^{19}$  Zeiteinheiten. Umfaßt die Produktionsstruktur dagegen die zehnfache Anzahl von Meßorten  $n' = 10n = 220$ , so steigt unter der Prämisse einer unveränderten Anzahl von Meßgerätearten  $m' = m = 3$  die maximale Rechenzeit für die Lösung des Gesamtmodells bereits auf  $t'_{\max} = f(3, 220) = 2^{3 \cdot 220} \approx 4,8 \cdot 10^{198}$  Zeiteinheiten. Diese "Explosion" des Rechenzeitbedarfs verdeutlicht, daß schon eine geringfügige Vergrößerung des modellierten Realitätsausschnitts den Ressourcenverzehr zur Modelllösung (im ungünstigsten Fall) prohibitiv hoch werden läßt.

Aus dieser mißlichen Situation, daß mit steigender Modellkomplexität (unter der worst case-Prämisse) die wirtschaftliche Vertretbarkeit des Versuchs einer Modelllösung rasch abnimmt, können zwei Alternativen herausführen:

- Der zu modellierende Realitätsausschnitt wird durch Dekompositionsstrategien in kleine Teilausschnitte - etwa eng begrenzte Betriebsbereiche - derart zerlegt, daß ein jedes Teilmodell, das einen solchen Teilausschnitt abbildet, mit wirtschaftlich vertretbarem Aufwand gelöst werden kann. Die Art der Dekomposition stellt allerdings ein Entscheidungsproblem sui generis dar, weil von ihr nicht nur der (maximale) Ressourcenverzehr zur Lösung der resultierenden Teilmodelle abhängt, sondern auch die Eliminierung derjenigen realen Interdependenzen zwischen den Teilausschnitten, welche in den Teilmodellen nicht mehr abgebildet werden können. Wegen dieser Vernachlässigung nicht unwesentlicher Determinanten des Realproblems kann die Berechnung "optimaler" Lösungen, wenn sie auf der Ebene der formalen, das Realproblem abbildenden Teilmodelle erfolgt, hinsichtlich des zu lösenden Realproblems nur noch eine suboptimale, allenfalls nur zufällig optimale, Qualität besitzen.

- Der zu modellierende Realitätsausschnitt wird nicht dekomponiert, aber auf das resultierende, homogene Gesamtmodell werden heuristische Lösungsalgorithmen angewendet, die jedoch optimale Modellösungen nicht mehr zu garantieren vermögen. Bei einem solchen Verzicht auf die an sich angestrebte maximale Güte der Modellösung können Lösungsalgorithmen angewendet werden, deren Ressourcenbedarf wesentlich geringer ist als derjenige der (exakt) optimierenden Algorithmen. Dabei ist es durchaus möglich, auch das Gesamtmodell eines Realitätsausschnitts - etwa einer gesamten betrieblichen Produktionsstruktur - mit noch wirtschaftlich vertretbarem Aufwand zu lösen, dies aber eben nur mit verminderter Güte.

Beide genannten Alternativen stimmen dahingehend überein, daß sie für das Realproblem nur suboptimale Lösungen anbieten können. Beide methodischen Alternativen können für reale Aufgabenstellungen bezüglich einer Meßgerätearten-Meßortezuordnung auch miteinander kombiniert werden.

Auf die Dekomposition des Realproblems zur Abbildung auf mehrere Teilmodelle soll nicht näher eingegangen werden. Stattdessen wird ein Branch and Bound-Algorithmus vorgestellt; er besitzt die besondere Eigenschaft, daß mit ihm die zu erzielende Lösungsgüte und der hierfür nötige Ressourceneinsatz interdependent variiert werden können. Dadurch wird es dem Algorithmus-Anwender ermöglicht, die Lösungsgüte des Algorithmus - nach Maßgabe seiner individuellen Vorstellungen über den wirtschaftlich zur Modellösung vertretbaren Ressourcenverzehr - so anzupassen, daß eine Modellösung - innerhalb recht weiter Grenzen - sichergestellt werden kann.

#### 4.2 Ein Branch and Bound-Algorithmus

In der Folge wird zur Lösung des speziellen EIS-Modells ein Algorithmus vorgestellt, der auf dem Branch and Bound-Prinzip basiert. Sein Ziel ist es,

- in einer Basiskomponente zunächst den möglichen Lösungsraum mLR nach einem kombinatorischen Schema zu erzeugen,
- in einer Eröffnungskomponente sodann eine erste, im Sinne der Zielfunktion "möglichst" gute, suboptimale zulässige Lösung aus dem Teilraum zLR hervorzubringen und schließlich
- in Verbesserungskomponenten im Sinne der Zielfunktion bessere zulässige Lösungen aus dem Teilraum zLR oder sogar alle optimalen Lösungen aus dem Teilraum oLR herzuleiten.

Bei diesem gespaltenen Konzept hat der Entscheidungsträger (zudem) die Möglichkeit, sich auf die Eröffnungslösung oder eine ihr gegenüber verbesserte, aber noch suboptimale Verbesserungslösung zu beschränken. Dadurch kann er den Aufwand der Algorithmusausführung begrenzen und sich flexibel an die von der Realproblemstellung jeweils nahegelegte Modellgröße anpassen.

4.2.1 Der Teilalgorithmus für die Eröffnungskomponente beginnt mit einer Linearisierung, durch welche die Matrizen  $(u_{ij} | i \in (1,1,m) \wedge j \in (1,1,n))$  und  $(x_{ij} | i \in (1,1,m) \wedge j \in (1,1,n))$  in Vektoren  $u_h = (u_r | r \in (1,1,m \cdot n))$  bzw.  $e_h = (x_r | r \in (1,1,m \cdot n))$  transformiert werden. Fortan sei die Anzahl der Komponenten dieser beiden Vektoren mit  $w = m \cdot n$  bezeichnet. Diese Vektoren besitzen die gleichen Koeffizienten-Werte wie die Ausgangsmatrizen, jedoch werden deren Indizes vom zweidimensionalen Index  $ij$  zum eindimensionalen Index  $r$  redefiniert. Hierzu werden die Nettonutzen-Schätzwerte  $u_{ij}$  in discendenter Reihenfolge geordnet und - beginnend mit  $j$  dem höchsten Schätzwert - mit den neuen Indizes  $r \in (1,1,w)$  versehen. Bei identischen Schätzwerten  $u_{ij} = u_{i'j'}$  für  $(i,j) \neq (i',j')$  kann jede beliebige Konfliktlösungsregel Anwendung finden. Nach erfolgter Reihung gilt sodann mit  $u_h$  als Vektor der linear angeordneten Nettonutzen-Schätzwerte:

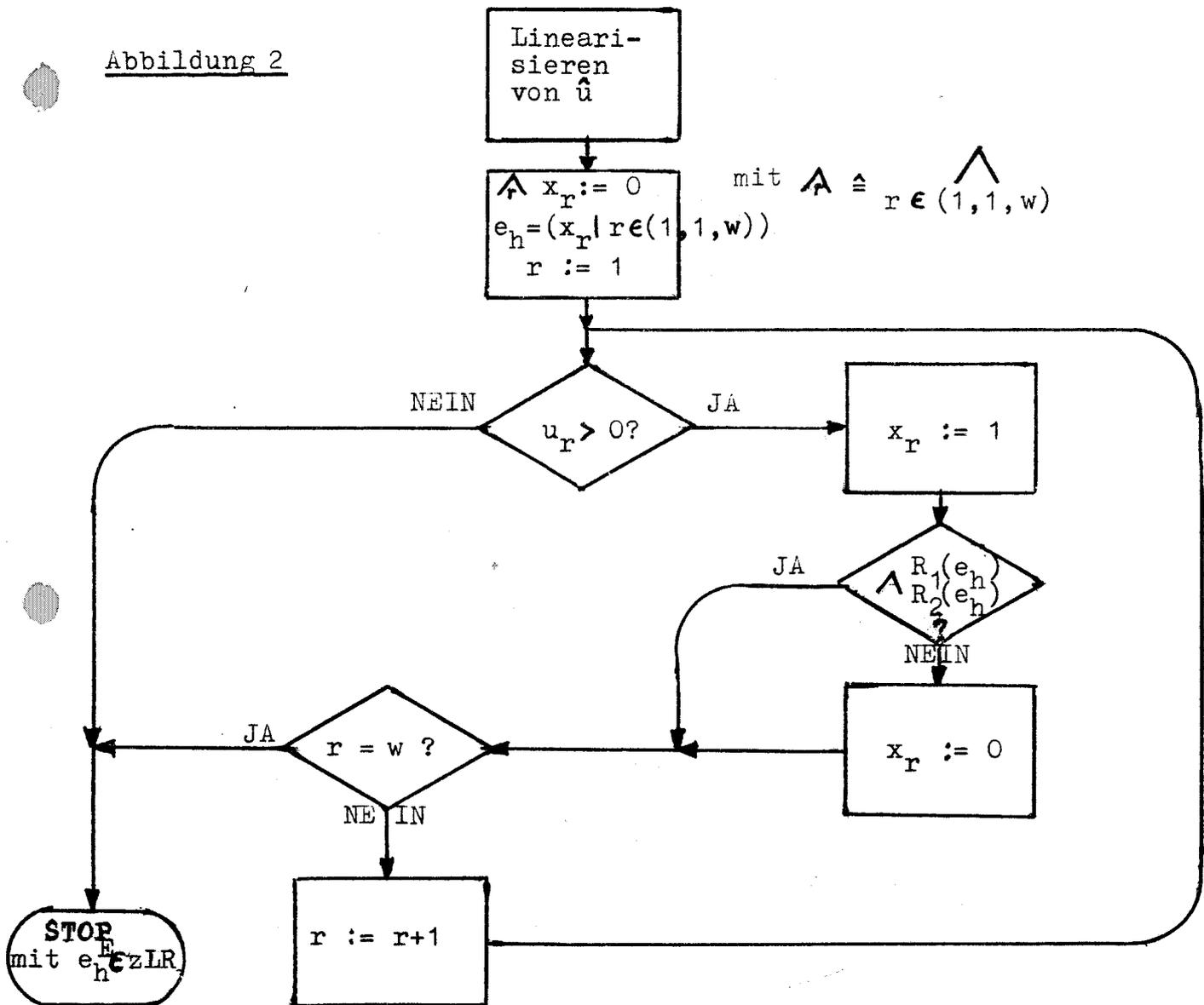
$$u_h = \left( u_r \mid r \in (1,1,w) \wedge \bigwedge_{r' \in (1,1,w) \setminus \{r\}} (r' > r \leftrightarrow u_{r'} \leq u_r) \wedge \bigwedge_{r' \in (1,1,w) \setminus \{r\}} \left[ r' \neq r \wedge \bigvee_{i,i' \in (1,1,m)} \bigvee_{j,j' \in (1,1,n)} (u_{ij} = u_{r'} \wedge u_{i'j'} = u_r \wedge (i,j) \neq (i',j')) \right] \right)$$

Dann kann jede Entscheidungsalternative  $e_h \in \text{mLR}$  als ein linearisierter Entscheidungsvektor dargestellt werden, und zwar mit:

$$e_h = \left( x_r \mid r \in (1,1,w) \wedge \bigwedge_{r' \in (1,1,w) \setminus \{r\}} (r' > r \leftrightarrow u_{r'} \leq u_r) \right)$$

Der Teilalgorithmus der Eröffnungskomponente beruht auf dem einfachen, am Grenz(netto)nutzenkonzept orientierten Prinzip, die Entscheidungsvariablen  $x_r$  in ascender Reihenfolge ihrer Indices  $r$  so lange auf  $x_r=1$  festzulegen, bis der zugehörige Nettonutzen nicht-positiv wird oder alle Entscheidungsvariablen festgelegt sind. Bedingung ist dabei, daß keine der Restriktionen  $R_1(e_h)$  oder  $R_2(e_h)$  verletzt wird (im Falle einer Restriktionsverletzung durch  $x_r=1$  wird stattdessen  $x_r=0$  festgelegt). Hieraus folgt zusammenfassend das Flußschema für diesen einfachen Teilalgorithmus mit  $e_h^E$  als resultierender Eröffnungslösung (Abbildung 2):

Abbildung 2



Die suboptimale Lösung  $e_h^E = (x_1^E, \dots, x_w^E)$ , die bei Abschluß der Eröffnungskomponenten-Ausführung vorliegt, kann zufällig optimal sein. Das ist dann der Fall, wenn

- entweder  $e_h^{E1} = (1, \dots, 1)$
- oder  $e_h^{E2} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$

gilt. Die zweite Erklärung erfaßt diejenigen Konstellationen, in denen genau eine Komponente des Vektors  $e_h^{E2}$  den Betrag  $x_r^{E2} = 0$  angenommen hat.

Da in den  $w$  Komponenten des Entscheidungsvektors  $e_h$  nur solche Entscheidungsvariablen  $x_{rh}$  enthalten sind, an die bei einer Meßgeräteart-Meßort-Zuordnung, gekennzeichnet durch  $x_{rh} = 1$ , ein positiver Nettonutzen-Schätzwert  $u_r > 0$  geknüpft ist, läßt sich die Optimalität des Vektors  $e_h^{E1}$  unmittelbar einsehen.

Die Optimalität der Vektorklasse  $e_h^{E2}$  mit genau einer gleich Null gesetzten Entscheidungsvariablen  $x_{rh}^{E2}$  und  $r \in (1, 1, w)$  folgt dagegen aus der speziellen Konstruktionsweise der Eröffnungskomponente: Da die Entscheidungsvariablen in descendenter Reihenfolge zugehöriger Nettonutzen-Schätzwerte angeordnet sind und die Eröffnungslösung vom Typ  $e_h^{E2}$  die Zulässigkeit der Lösung  $e_h^{E1}$  per constructionem ausschließt, könnte eine Verbesserung der Eröffnungslösung vom Typ  $e_h^{E2}$  nur dadurch erfolgen, daß die Entscheidungsvariable mit  $x_{rh} = 0$  den Wert 1 und stattdessen (mindestens) eine Entscheidungsvariable mit  $x_{r'h}^{E2} = 1$  und  $r' \in (1, 1, w) \setminus \{r\}$  den Wert 0 annimmt.

Im Fall  $r' < r$  würde wegen  $u_{r'} > u_r$  der ursprüngliche Nettonutzen-Schätzwert  $u_r$ , welcher der durch  $x_{r'h}^{E2} = 1$  ausgedrückten Zuordnung entspricht, durch den geringeren Nettonutzen-Schätzwert  $u_{r'}$  substituiert werden, welcher der durch  $x_{r'h}^{E2} = 1$  ausgedrückten Zuordnung zukommt. Infolge dieser Minderung des Nettonutzen-Schätzwertes kann der Fall  $r' < r$  niemals zu einer Verbesserung der Eröffnungslösung vom Typ  $e_h^{E2}$  führen.

Der Fall  $r' > r$  führt dagegen notwendig zu einer unzulässigen Lösung. Wäre eine solche modifizierte Eröffnungslösung nämlich zulässig, so wäre sie von der Eröffnungskomponente aufgrund ihrer Konstruktionsweise ebenfalls notwendig erzeugt worden. Sie hätte notwendig zur Zuordnung  $x_{r'h}^{E2} = 1$  geführt, wenn - unter Voraussetzung von  $x_{r''h}^{E2} = 1$  für alle  $r'' \in (1, 1, r-1)$  - der Betrag 1 für  $x_{r'h}^{E2}$  gegen keine Restriktion verstoßen hätte. Weil dies voraussetzungsgemäß aber nicht der Fall war, muß die modifizierte Eröffnungslösung unzulässig sein.

Da der Fall  $r' = r$  wegen des Unterbleibens einer Veränderung der Eröffnungslösung vom Typ  $e_h^{E2}$  nicht relevant wird und weder  $r' < r$

noch  $r' > r$  zu einer zulässigen Verbesserung der Eröffnungslösung führen können, muß diese notwendig eine optimale Lösung sein. Dies galt es zu beweisen.

Die von der Ausführung der Eröffnungskomponente erzeugte suboptimale Lösung  $e_h^E$  wäre auch im Extremfall  $e_h^E = e_1 = (0, \dots, 0)$  bereits zufällig optimal. Wenn von der Eröffnungskomponente keine einzige Meßgerätsart einem der möglichen Meßorte zugeordnet werden konnte, liegt nämlich der - in praxi nicht zu erwartende - degenerierte Fall vor, daß der Raum zulässiger Lösungen zur Nulllösung  $e_1$  als einem Punkt entartet ist. Dann aber ist die einzige optimale Lösung notwendig mit der einzig zulässigen Lösung identisch.

Eine Ergänzung der Eröffnungskomponente durch den Test ihrer Lösung im Hinblick auf die Erfüllung eines der drei vorstehend genannten, hinreichenden, aber nicht notwendigen Optimalitätskriterien kann ein überflüssiges Initiieren weiterer Algorithmus-Teilkomponenten partiell verhindern, sofern eben bereits - zufällig - eine optimale Lösung des Zuordnungsproblems vorliegt. Andernfalls müssen auf die Eröffnungskomponente zur intendierten Lösungsverbesserung die Basiskomponente (4.2.2) und eine der in 4.2.3 vorgestellten Verbesserungskomponenten folgen.

Bei den nachstehenden Ausführungen wird vorausgesetzt, daß alle drei Optimalitätstests im Anschluß an die Eröffnungskomponente ausgeführt werden und nur dann ein Einstieg in die Basiskomponente erfolgt, wenn alle drei Tests negativ ausgefallen sind.

- 4.2.2 Die Basiskomponente des Lösungsalgorithmus erzeugt den möglichen Lösungsraum in Form eines Lösungsbaums. In ihm stellt jeder Knoten genau eine Entscheidungsalternative  $e_h \in mLR$  dar, und jede gerichtete Kante bedeutet, daß ihr Zielknoten mit ihrem Quellknoten identisch ist. Ausgenommen ist davon jeweils immer nur genau diejenige Entscheidungsvariable  $x_{ij}$ , hinsichtlich derer für den Zielknoten  $x_{ij} = 1$  und den Quellknoten  $x_{ij} = 0$  gilt. Die Basiskomponente setzt eine lineare Anordnung aller Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  voraus, so daß jeder Knoten als eine Entscheidungsalternative  $e_h$  in Vektorschreibweise aufgefaßt werden kann. Da die Eröffnungskomponente des Lösungsalgorithmus stets vor seiner Basiskomponente ausgeführt wird, können die Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  nach Maßgabe der durch die Eröffnungslösung festgelegten ascendenten Reihenfolge der redefinierten Indizes  $r'$  geordnet werden. Mit der Knotenanzahl  $ak = 2^w$ , die per constructionem identisch ist mit der seitens der Basiskomponente berücksichtigten Anzahl von Entscheidungsalternativen  $e_h$ , gilt:

$$\bigwedge_{h \in (1,1,ak)} e_h = ( x_r \mid r \in (1,1,w) \wedge \bigwedge_{r' \in (1,1,w) \setminus \{r\}} ( r' > r \leftrightarrow u_{r'} \leq u_r ) )$$

Der Lösungsbaum kann a priori eine Reduktion auf die Knotenanzahl  $ak = 2^{w'}$  insofern erfahren, als aus den oben definierten Knoten-Vektoren  $e_h$  sämtliche Entscheidungsvariablen  $x_r$  eliminiert werden, die - beim Übergang von einem Referenzknoten im Lösungsbaum zu einem seiner Folgeknoten - niemals zu einer echten Lösungsverbesserung führen können. Dies ist der Fall bei allen nicht-positiven Nettonutzen-Schätzwerten, die den Zuordnungstupeln  $(MG_i, MC_i)$  zukommen, wenn die Werte der sie charakterisierenden Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  von "0" auf "1" gesetzt werden. Daher wird nachstehend mit  $1 \leq w' \leq w$  für die von solchen Knoten repräsentierten Entscheidungsvektoren folgendes unterstellt:

$$\bigwedge_{h \in (1,1,ak)} e_h = ( x_r \mid r \in (1,1,w') \wedge [ \bigwedge_{r' \in (1,1,w') \setminus \{r\}} (r' > r \leftrightarrow 0 < u_{r'} \leq u_r) ] \wedge u_r > 0 )$$

Der Lösungsbaum kann nun abermals reduziert werden, und zwar auf  $1 \leq ak' \leq 2^{w'}$  Knoten. Dies geschieht dadurch, daß alle Folgeknoten desjenigen Referenzknotens, der die durch die Eröffnungslösung definierte Entscheidungsalternative  $e_h^E$  repräsentiert, eliminiert werden.

Begründen läßt sich dies damit, daß diese Folgeknoten - sofern sie überhaupt existieren - aufgrund der Konstruktionsweisen der Eröffnungskomponente und des Lösungsbaums (siehe dazu unten) unzulässige Modellösungen darstellen müssen, weil die Folgeknoten in bezug auf die zulässige Eröffnungslösung nur zu Entscheidungsalternativen führen können, die mindestens eine Restriktion verletzen.

Im einzelnen kann der Teilalgorithmus der Basiskomponente durch die folgenden fünf Schritte (S. 26) definiert werden:

- (1) Wähle  $e_1 = \underline{0}$  als Wurzel des Lösungsbaums mit  $\underline{0}$  als  $w'$ -stelligem Nullvektor!
- (2) Setze  $H := 1!$
- (3) Ermittle für denjenigen Knoten des Lösungsbaums, der die Entscheidungsalternative  $e_h$  repräsentiert, die Menge aller seiner unmittelbaren Folgeknoten der Entscheidungsalternativen  $e_{h'}$  mit  $h' > h$ :
  - (3.1) Zerlege den Vektor  $e_h$  - sofern möglich - in zwei Teilvektoren, welche jeweils die Entscheidungsvariablen  $x_r$  in zusammenhängender Reihenfolge ihrer Indizes  $r$  enthalten, und zwar:
    - einen (rechten) maximalen Null-Teilvektor  $e_h^0 = (0, 0, \dots, 0)$  derart, daß  $e_h$  keinen größeren Null-Teilvektor enthält;
    - einen (linken) von Einsen berandeten Teilvektor  $e_h^1 = (1, 1, \dots, 1)$ .
 Beide Teilvektoren  $e_h^0$  und  $e_h^1$  können im Extremfall auch auf den einkomponentigen Vektor (0) bzw. (1) reduziert werden. Im Fall der Entscheidungsalternative  $e_h = e_1$  entfällt der Teilvektor  $e_h^1$  ganz, so daß der "Teil-"Vektor  $e_h^0$  mit dem Vektor  $e_h$  zusammenfällt.
  - (3.2) Jeder unmittelbare Folgeknoten stimmt mit dem Referenzknoten im linken Teilvektor  $e_h^1$  überein, sofern dieser Teilvektor im Referenzknoten existiert.
  - (3.3) Wenn der rechte Teilvektor  $e_h^0$  des Referenzknotens  $y$  Koeffizienten besitzt mit  $1 \leq y \leq w'$ , so bilde  $y$  verschiedene unmittelbare Folgeknoten, indem der  $d$ -te unmittelbare Folgeknoten mit  $d \in (1, 1, y)$  als rechten Teilvektor  $e_{h'} = (0_1, \dots, 0_{d-1}, 1_d, 0_{d+1}, \dots, 0_y)$  erhält. Somit gilt für den Entscheidungsvektor  $e_{h'}$  jedes unmittelbaren Folgeknotens:
 
$$e_{h'} = (1_1, \dots, 1_{w'-y}, 0_{w'-y+1}, \dots, 0_{w'-y+d-1}, 1_{w'-y+d}, 0_{w'-y+d+1}, \dots, 0_{w'}).$$
- (4) Wenn der zuletzt erzeugte unmittelbare Folgeknoten einen Einsvektor mit  $e_{h'} = (1, \dots, 1)$  darstellt, ist das Ende des Algorithmus erreicht, da dieser Einsvektor per constructionem mit der letzten Entscheidungsalternative  $e_{ak}$  des Lösungsbaums identisch ist.
- (5) Andernfalls setze  $h := h''_{\min}$ ! Das Symbol  $h''_{\min}$  steht für den niedrigsten Index aus der Menge der Indizes  $h''$  aller derjenigen Entscheidungsalternativen  $e_{h''}$ , für deren repräsentierende Knoten im Lösungsbaum noch nicht die Menge der unmittelbaren Folgeknoten gebildet wurde und die von der Entscheidungsalternative  $e_h$  der Eröffnungslösung verschieden sind. Gehe sodann nach (3) zurück!

Dieser als Basiskomponente bezeichnete Teilalgorithmus führt zur Abbildung des maßgebenden Lösungsraumes. Dieser läßt sich wie in Abbildung 3 unter Verwendung  $w'$ -stelliger Entscheidungsvektoren als Lösungsbaum darstellen.

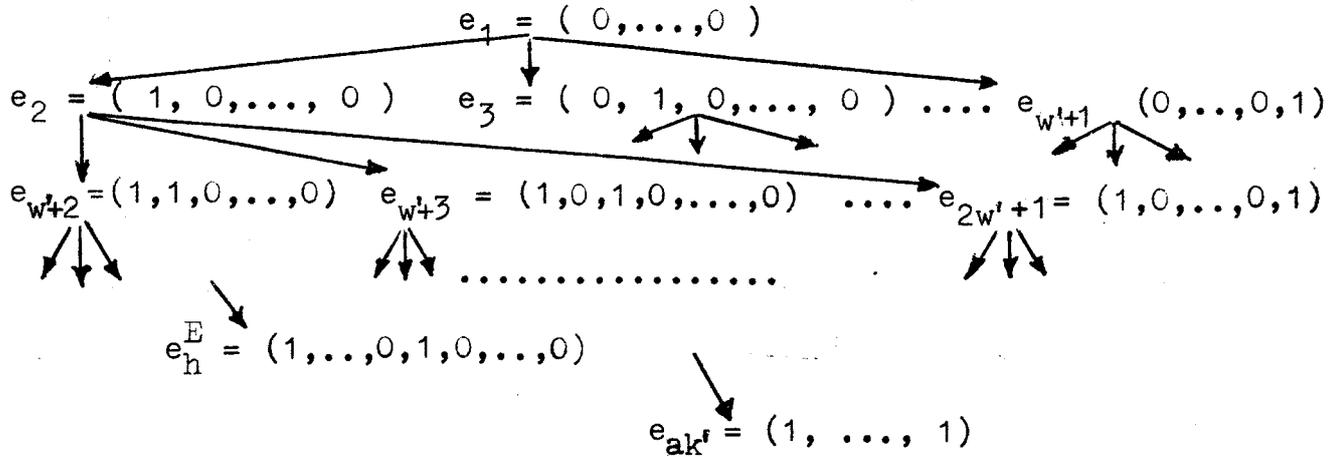


Abbildung 3.

4.2.3 Im Anschluß an die Basiskomponenten muß für den generellen Algorithmus zur Modellösung eine der nachstehend beschriebenen Verbesserungskomponenten angewendet werden. Es sind dies

- eine beschränkt enumerierende (primale) Version  $VK_1$
- zwei heuristische Versionen  $VK_2$  und  $VK_3$
- eine verkürzt enumerierende (duale) Version  $VK_4$
- eine Kombination von  $VK_1$  und  $VK_4$

4.2.3.1 Als erste Verbesserungskomponente  $VK_1$  wird ein Teilalgorithmus vorgeschlagen, der durch eine Suche in demjenigen Lösungsbaum, der zuvor von der Basiskomponente erzeugt wurde, notwendig zu einer intendierten Lösung aus dem optimalen Lösungsraum oLR führt. Dies geschieht nach dem Branch and Bound-Prinzip mittels

- einer beschränkten Enumeration des möglichen Lösungsraums mLR
- jeweils in Verbindung mit einer Überprüfung der Zulässigkeit der enumerierten Modellösungen.

Diesem optimierenden Teilalgorithmus liegen folgende Erkenntnisse und Vereinbarungen zugrunde:

- Da der reduzierte Lösungsbaum nur Entscheidungsvariablen  $x_r$  mit zugeordneten positiven Nettonutzen-Schätzwerten  $u_r > 0$  als Koeffizienten  $x_r$  der von seinen Knoten repräsentierten Entscheidungsvektoren  $e_h$  enthält, bedeutet jeder
  - = Übergang auf einen Folgeknoten mit Entscheidungsvektor  $e_{h'}$  eine Zunahme des Zielfunktionswerts auf  $z(e_{h'}) > z(e_h)$ ;
  - = Übergang auf einen Vorgängerknoten mit Entscheidungsvektor  $e_{h''}$  eine Abnahme des Zielfunktionswerts auf  $z(e_{h''}) < z(e_h)$ .
- Wenn ein Knoten mit dem Entscheidungsvektor  $e_h$  eine unzulässige Modellösung darstellt, müssen auch alle seine Folgeknoten unzulässige Modellösungen darstellen, weil sie hinsichtlich aller Entscheidungsvariablen  $x_r$  mit  $x_r = 1$  im Entscheidungsvektor  $e_h$  mit eben diesem Entscheidungsvektor übereinstimmen. Daher brauchen alle Folgeknoten eines solchen Referenzknotens nicht mehr berücksichtigt zu werden. Die Menge aller unmittelbaren Folgeknoten für einen Knoten mit dem Entscheidungsvektor  $e_h$  wird als  $N(e_h)$  bezeichnet.
- Ein Knoten im Lösungsbaum mit dem Entscheidungsvektor  $e_h$  gilt als vollständig analysiert, wenn er keine noch nicht vollständig analysierten (unmittelbaren) Folgeknoten besitzt oder wenn er eine unzulässige Modellösung repräsentiert. ANA( $e_h$ )/NANA( $e_h$ ) bedeutet, daß der Knoten mit dem Entscheidungsvektor  $e_h$  vollständig/nicht vollständig analysiert vorliegt.
- Zur Beschränkung der Enumeration möglicher Modellösungen wird eine Untergrenze der Zielfunktionswerte  $z(e_h)$  gebildet, die durch mindestens eine bereits aufgefundene Referenzlösung in Gestalt des Entscheidungsvektors  $e_h^R$  als  $z(e_h^R)$  gegeben ist. Als erste Referenzlösung wird die Eröffnungslösung  $e_h^E$  angenommen. Jede neue zulässige Lösung mit höherem Zielfunktionswert als die letzte Referenzlösung wird zur neuen Referenzlösung erhoben.
- Wenn der gesamte Lösungsbaum durch vollständige Analyse aller seiner Knoten abgearbeitet ist, muß die letzte Referenzlösung notwendig eine der intendierten optimalen Modellösungen darstellen.
- Jeder von der Wurzel des Lösungsbaums verschiedene Knoten mit dem Entscheidungsvektor  $e_h$  hat eine elementare Menge  $V(e_h)$  von unmittelbaren Vorgängerknoten. Wenn der Knoten mit dem Entscheidungsvektor  $e_h$  eine zulässige Modellösung darstellt, muß sein unmittelbarer Vorgängerknoten  $e_{h'}$  mit  $\{e_{h'}\} = V(e_h)$  notwendig ebenso eine zulässige Modellösung bedeuten.

Der Teilalgorithmus der optimierenden Verbesserungskomponente  $VK_1$  lässt sich in dem in Abbildung 4 gezeigten Flußdiagramm darstellen.

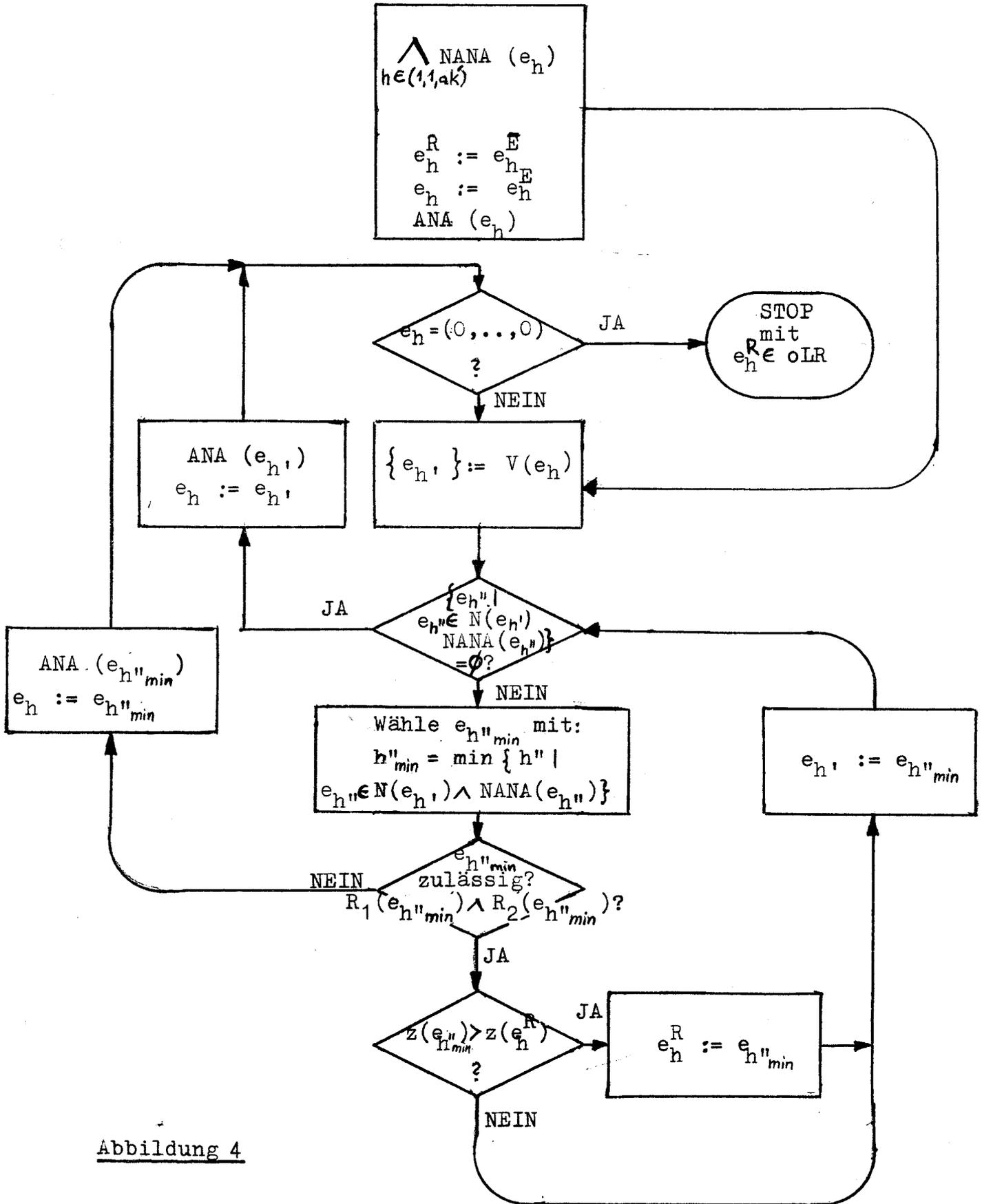


Abbildung 4

4.2.3.2 Die zweite Verbesserungskomponente  $VK_2$  stellt einen sub-optimierenden Teilalgorithmus dar. Er unterscheidet sich vom Teilalgorithmus der ersten Verbesserungskomponente  $VK_1$  nur dadurch, daß die beschränkte Enumeration der Knoten des Lösungsbaums durch ein heuristisches Kriterium begrenzt wird. Dies kann zur Folge haben, daß bei Erfüllung dieses Abbruchkriteriums eine der optimalen Lösungen im Lösungsbaum noch nicht aufgefunden worden ist, so daß die im Abbruchpunkt zuletzt erzeugte Referenzlösung  $e_h^R$  als suboptimale Modellösung vorgeschlagen wird, nicht aber notwendig  $e_h^R \in oLR$  erfüllen muß.

Als Abbruchskriterien kommen beispielsweise in Frage:

- der starre Abbruch nach einer maximalen Anzahl vollständig analysierter Knoten des Lösungsbaums (sofern nicht schon vorher eine optimale Lösung gefunden wurde);
- der starre Abbruch nach einer maximal vorgegebenen Operationsdauer für die Algorithmusausführung auf einer Automatischen Datenverarbeitungsanlage (sofern nicht schon vorher eine optimale Lösung gefunden wurde);
- der flexible Abbruch, wenn der Quotient aus dem Zielfunktionswert  $z(e_h^R)$  der zuletzt erzeugten Referenzlösung  $e_h^R$  und aus der Anzahl der vollständig analysierten Knoten des Lösungsbaums eine fest vorgegebene, in Abhängigkeit vom Zielfunktionswert  $z(e_h^E)$  der Eröffnungslösung  $e_h^E$  bestimmte Untergrenze unterschreitet (sofern nicht schon vorher eine optimale Lösung gefunden wurde).

4.2.3.3 Die dritte Verbesserungskomponente  $VK_3$  stützt sich auf einen gegenüber den Verbesserungskomponenten  $VK_1$  und  $VK_2$  vereinfachten Teilalgorithmus, der die Gültigkeit der Separationsprämisse  $P_9$  ausnutzt: Die gerichteten Kanten des von der Basiskomponente erzeugten Lösungsbaums werden mit Bewertungen  $\Delta u_{QZ} > 0$  beschriftet, welche die Zunahme des Nettonutzen-Schätzwertes beim Übergang vom Quellknoten der betroffenen Kante mit dem Entscheidungsvektor  $e_h^Q$  zu ihrem Zielknoten mit dem Entscheidungsvektor  $e_h^Z$  ausdrückt. Aufgrund der Konstruktionsweise des Lösungsbaums, der zufolge sich Quell- und Zielknoten nur in einer einzigen Entscheidungsvariablen  $x_r^*$  unterscheiden können, und aufgrund der durch die Separationsprämisse gegebenen Möglichkeit, dieser Entscheidungsvariable den Nettonutzen-Schätzwert  $u_r$  verursachungsgerecht zuzurechnen, ergibt sich die jeweils maßgebliche (mutmaßliche) Zielwertänderung  $\Delta u_{QZ}$ , die mit dem Übergang zwischen zwei Entscheidungs-

alternativen zu verbinden ist, in der nachstehend angeführten Formulierung. Dabei bedeuten  $x_{hr}$  den  $r$ -ten Koeffizienten des Entscheidungsvektors  $e_h$  und  $u_{hr}$  den  $r$ -ten Koeffizienten des dem Entscheidungsvektor  $e_h$  zugeordneten Vektors  $u_h$ .

$$\begin{aligned} u_{QZ} &= z(e_h^Z) - z(e_h^Q) \\ &= \sum_{r=1}^{w'} (u_{hr} \cdot x_{hr}^Z) - \sum_{r=1}^{w'} (u_{hr} \cdot x_{hr}^Q) \\ &= \left[ u_{hr^*} \cdot x_{hr^*}^Z + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r^*}}^{w'} (u_{hr} \cdot x_{hr}^Z) \right] - \left[ u_{hr^*} \cdot x_{hr^*}^Q + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r^*}}^{w'} (u_{hr} \cdot x_{hr}^Q) \right] \end{aligned}$$

Aufgrund der Konstruktionsweise des Lösungsbaums gilt für den Quellknoten mit dem Entscheidungsvektor  $e_h^Q$  und dem Zielknoten mit dem Entscheidungsvektor  $e_h^Z$ :

$$\left[ \bigwedge_{r \in (1,1,w') \setminus \{r^*\}} x_{hr}^Q = x_{hr}^Z \right] \wedge x_{hr^*}^Q = 0 \wedge x_{hr^*}^Z = 1$$

Hieraus folgt:

$$\Delta u_{QZ} = u_{hr^*} \cdot 1 - u_{hr^*} \cdot 0 + \underbrace{\left[ \left( \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r^*}}^{w'} u_{hr} \cdot x_{hr}^Z \right) - \left( \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r^*}}^{w'} u_{hr} \cdot x_{hr}^Q \right) \right]}_{= 0}$$

$$\iff \Delta u_{QZ} = u_{hr^*}$$

In dem auf diese sehr einfache Weise bewerteten Lösungsbaum können die Teilalgorithmen der Verbesserungskomponenten  $VK_1$  und  $VK_2$  modifiziert werden, indem im Flußdiagramm der Abbildung 3 die - in der Bildmitte vermerkte - Operationsanweisung

Wähle  $e_{h''_{min}}$  mit:  
 $h''_{min} = \min \{ h'' \mid$   
 $e_{h''} \in N(e_{h'}) \wedge NANA(e_{h''}) \}$

ersetzt wird durch:

- entweder die Operationsanweisung:

Wähle  $e_{h''_{max}}$  mit:  
 $\Delta u_{h'h''_{max}} = \max \{ \Delta u_{h'h''} \mid$   
 $e_{h''} \in N(e_{h'}) \wedge NANA(e_{h''}) \}$

- oder die Operationsanweisungen:

$$\begin{array}{l} \text{Wähle } e_{h''_{max}} \text{ mit:} \\ \Delta u_{h', h''_{max}} = \max \{ u_{h', h''} | \\ e_{h''} \in N(e_{h'}) \wedge \text{NANA}(e_{h''}) \} \end{array}$$

sowie sodann

$$\bigwedge_{e_{h''} \in N(e_{h'})} \text{ANA}(e_{h''}) \mid e_{h''} \in N(e_{h'})$$

Die Teilanweisung  $\gg \text{ANA}(e_{h''_{min}}) \mid e_{h'} := e_{h''_{min}} \ll$  in der Operationsanweisung von Abbildung 3 entfällt dafür.

Die erstgenannte Operationsanweisung würde dazu führen, daß der Teilalgorithmus von  $VK_3$  sehr schnell eine Referenzlösung mit relativ hohem Zielfunktionswert erzeugt, weil er sich zunächst auf die Folgeknoten mit den größten Zunahmen der Nettonutzen-Schätzwerte konzentriert. Basiert  $VK_3$  auf  $VK_1$ , bleibt der Teilalgorithmus optimierend. Basiert  $VK_3$  auf  $VK_2$ , liegt ein suboptimierender Teilalgorithmus vor; er zeichnet sich dadurch aus, daß die Wahrscheinlichkeit, bei Erreichen des Abbruchkriteriums schon zufällig auf eine optimale Lösung gestoßen zu sein, relativ groß ist.

Die letztgenannte Operationsanweisung führt sowohl in Verbindung mit  $VK_1$  als auch mit  $VK_2$  notwendig zu einem suboptimierenden Algorithmus, weil aus der Menge  $N(e_{h'})$  der unmittelbaren Nachfolgerknoten eines Referenzknotens  $e_{h'}$  immer nur die Nachfolgerknoten mit maximaler Zunahme des Nettonutzen-Schätzwertes analysiert werden, also die beschränkte Enumeration der Knoten des Lösungsbaums zusätzlich eingeschränkt wird. Es gilt die gleiche auszeichnende Eigenschaft wie in der vorgenannten Variante.

4.2.3.4 Eine vierte Verbesserungskomponente  $VK_4$  basiert auf der Überlegung, daß die - aus analytischen Erwägungen vorgenommene - Trennung zwischen Basis- und Verbesserungskomponente aufgegeben wird. Die dadurch intendierte Verschmelzung der Teilalgorithmen läßt sich relativ leicht vollziehen, indem der mögliche Lösungsraum nur in jeweils dem Maße generiert wird, wie er zur Betrachtung einer neuen, noch nicht auf Zulässigkeit und Verbesserung untersuchten möglichen Entscheidungsalternative notwendig ist. Diese Verschmelzung kann den Aufwand zur Speicherung von Zwischenergebnissen wesentlich reduzieren. Sie kann bei Erzeugung nur suboptimaler Lösungen in den Verbesserungskomponenten auch die Anzahl der auszuführenden Rechenoperationen erheblich verringern, indem auf die Konstruktion bestimmter möglicher Lösungen verzichtet wird, die nach Erreichen der letzten suboptimalen Lösung nicht mehr erzeugt zu werden brauchen.

Die Variante  $VK_1$  der Verbesserungskomponente beschränkt die Enumeration kombinatorisch möglicher Lösungen - hier als Knoten im Lösungsbaum, die Entscheidungsalternativen (-vektoren)  $e_h$  repräsentieren - auf diejenige Teilmenge aller zulässigen Lösungen, die von keinen - unmittelbaren oder mittelbaren - Knoten desjenigen Knotens dargestellt werden, welche die Eröffnungslösung repräsentieren. Sobald im Ablauf nämlich eine unzulässige Lösung erreicht wird, kann an ihrem Knoten (im Lösungsbaum) eine Fortsetzung der Lösungssuche in der eingeschlagenen Suchrichtung abgebrochen werden. Der Grund dafür ist, daß aufgrund der Konstruktionsweise des Lösungsbaums jeder - unmittelbare und mittelbare - Nachfolgerknoten eines Knotens, der eine unzulässige Lösung repräsentiert, notwendig wieder eine unzulässige Lösung darstellen muß. [Die in 4.2.1 vorgestellte Eröffnungskomponente erweist sich im Rahmen dieser Variante  $VK_1$  nur als ein starrer Ausschluß solcher zulässigen Lösungen, die von Nachfolgerknoten des die Eröffnungslösung repräsentierenden Knotens ausgedrückt wurden. Jede andere zulässige Lösung konnte, auch wenn ihr Zielfunktionswert unter dem der Eröffnungslösung lag, nicht von der weiteren Analyse des Lösungsbaums ausgeschlossen werden, weil infolge der Konstruktionsweise des Lösungsbaums durch ein weiteres Vorausschreiben im Lösungsbaum - ausgehend von der betrachteten zulässigen Lösung - durchaus noch eine zulässige Lösung mit höherem Zielfunktionswert als dem der Eröffnungslösung erreicht werden konnte. Die Bedeutung der Eröffnungskomponente liegt daher vor allem in der Vorgabe eines "möglichst" guten Einstiegswertes für die heuristischen Varianten  $VK_2$  und  $VK_3$  der Verbesserungskomponente.

Die Verbesserungskomponente  $VK_1$  kann - als Primal interpretiert - durch eine vierte Variante, die Verbesserungskomponente  $VK_4$ , als deren Dual neu gestaltet werden. Dies erfolgt in der Weise, daß das Wissen über den Zielfunktionswert der Eröffnungslösung - über den Ausschluß der Nachfolgerknoten des Eröffnungslösungsknotens hinaus - zusätzlich genutzt wird, um eine flexible Beschränkung der Lösungsenumeration durch den Branch and Bound-Algorithmus zu erreichen.

Zu diesem Zweck wird die Konstruktionsweise des Lösungsbaums zwar konzeptionell beibehalten, aber als seine Wurzel wird der Einsvektor  $e_1 = (1, \dots, 1)$  gewählt. Dann bedeutet jede gerichtete Kante  $(e_i, e_j)$ , daß der Betrag 1 für genau eine Entscheidungsvariable des Entscheidungsvektors ihres Quellknotens  $e_i$  substituiert wird durch den Betrag 0 für die gleiche Entscheidungsvariable im Entscheidungsvektor ihres Zielknotens  $e_j$ . Jede solche Kante ist dementsprechend mit einer Abnahme der Nettonutzen-Schätzwertsumme verknüpft, und zwar um den Wert  $\Delta u_{ij} < 0$ .

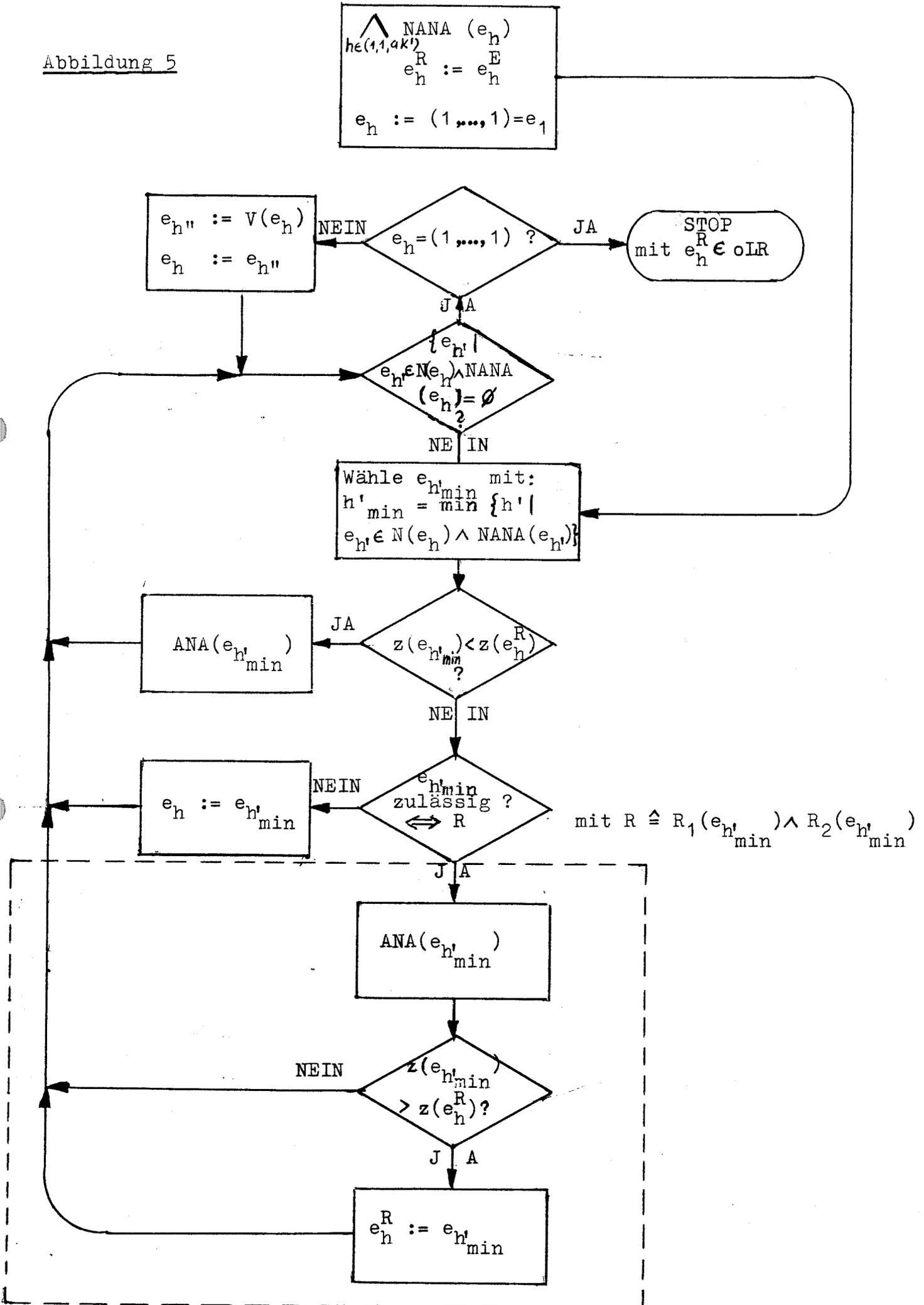
Sollte der Einsvektor  $e = (1, \dots, 1)$  eine zulässige Lösung sein, so wäre er bereits von der Eröffnungskomponente erzeugt und durch den o. a. Optimalitätstest bereits als optimal ausgewiesen worden; eine Initiierung der Verbesserungskomponente hätte sich dann erübrigt. Folglich muß die Wurzel  $e_1 = (1, \dots, 1)$  des Lösungsbaums eine unzulässige Lösung kennzeichnen, wenn die Verbesserungskomponente  $VK_4$  aufgerufen wird. Die weitere Lösungssuche spielt sich bei ihr <sup>4</sup> nur in der Teilmenge unzulässiger Lösungen und an ihrem

durch zulässige Lösungen gebildeten Rand ab. Stößt der Teilalgorithmus nämlich auf eine Lösung, die sich als zulässig nachweisen läßt, so kann keine derjenigen Lösungen, deren Knoten Nachfolgerknoten des Knotens dieser zulässigen Lösung sind, mehr zu einer Lösungsverbesserung führen. Der Grund dafür ist, daß jedes Voranschreiten im Lösungsbaum in Kantenrichtung mit einer Abnahme der Nettonutzen-Schätzwertsumme verknüpft ist. Daher wird der Knoten einer als zulässig nachgewiesenen Lösung als vollständig analysiert angesetzt und im folgenden nicht mehr expandiert. Der Zielfunktionswert (Nettonutzen-Schätzwertsumme) dieser zulässigen Lösung wird zunächst mit dem der (ebenfalls zulässigen) Eröffnungslösung und später mit dem der zuletzt erzeugten Referenzlösung verglichen. Ist der Zielfunktionswert der neu gefundenen zulässigen Lösung größer als der der alten Referenzlösung, so wird die alte Referenzlösung durch die neue zulässige Lösung als neue Referenzlösung ersetzt; andernfalls bleiben die alte und die neue Referenzlösung miteinander identisch.

Der Teilalgorithmus führt keine vollständige Enumeration der Teilmenge unzulässiger Lösungen aus, weil mit ihm vor dem Zulässigkeitsstest der Lösung des jeweils im Lösungsbaum analysierten Knotens der Zielfunktionswert dieser Lösung berechnet wird. Liegt dieser Zielfunktionswert unter dem der zuletzt erzeugten Referenzlösung, so wird auch dieser betrachtete Knoten als vollständig analysiert festgelegt und weder - hinsichtlich der Zulässigkeit seiner Lösung - analysiert noch weiter expandiert. Es existiert ja bereits - in Gestalt der Referenzlösung - eine zulässige Lösung mit höherem Zielfunktionswert, und ein Fortschreiten im Lösungsbaum vom betrachteten Knoten aus kann - wie oben dargelegt - niemals zu einer Verbesserung der Lösung des betrachteten Knotens führen. Der enumerationsrelevante Teilraum unzulässiger Lösungen läßt sich fortlaufend dadurch einschränken, daß am Rande des Raums unzulässiger Lösungen sukzessiv Referenzlösungen aufgespürt werden, die hinsichtlich ihrer Zielfunktionswerte besser sind. Eine solche Einschränkung muß allerdings nicht sein, weil keine Notwendigkeit besteht, auf verbesserte Referenzlösungen zu stoßen, wenn schon die Eröffnungslösung - unerkannt - optimal war. Aufgrund dieser Überlegungen wird die Suche nach einer optimalen Lösung mittels der (dualen) Verbesserungskomponente  $VK_4$  tendenziell weniger Knoten-Analysen bis zu einem erfolgreichen Ende erfordern als die Suche mit der (primalen) Verbesserungskomponente  $VK_1$ . Bei dieser kann der enumerationsrelevante Teilraum zulässiger Lösungen durch die Eröffnungslösung ja nur einmal in starrer Weise eingeschränkt werden, sofern von unterschiedlichen Größen der Teilräume unzulässiger bzw. zulässiger Lösungen abgesehen wird.

Die Abbildung 5 zeigt das Flußschema des vorgestellten Algorithmus.

Abbildung 5





#### 4.3 Zur Effizienz der Branch and Bound-Lösung

Eine grobe Abschätzung der worst case-Effizienz des vorgestellten Branch and Bound-Algorithmus läßt sich an Hand der Anzahl  $w'$  derjenigen involvierten Entscheidungsvariablen  $x_{rh}$  durchführen, welche die Komponenten der Lösungsvektoren (Entscheidungsalternativen)  $e_h$  bilden. Einschränkend muß jedoch festgestellt werden:

- Die worst case-Effizienz gilt nur für eine obere Schranke des Ressourceneinsatzes, und zwar derjenigen, die für die Erzeugung einer Problemlösung fest vorgegebener Güte in bezug auf kein Problem aus der eingangs definierten Klasse relevanter Zuordnungsprobleme überschritten wird.
- Die worst case-Effizienz wird folglich von den ungünstigsten, den "pathologischen" Problemen aus der vorgegebenen Problemklasse determiniert. Sie besitzt daher bezüglich der praktischen Anwendungstauglichkeit eines Algorithmus nur beschränkte Aussagekraft. Ein Tauglichkeitsmaßstab müßte sich eigentlich an der Durchschnitts- oder mit Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichteten Erwartungswert-Effizienz des betrachteten Algorithmus, und zwar für eine präsentative Stichprobe praktischer Zuordnungsprobleme, orientieren.
- Der Effizienzbegriff der Komplexitätstheorie bestimmt - in bezug auf eine Problemklasse - keine absoluten oberen Schranken für den Ressourcenverzehr eines Algorithmus, sondern nur relative Schranken mit Grenzwertcharakter. So wird der Ressourcenverzehr in Abhängigkeit von der (Codierungs-)Länge der Spezifizierung desjenigen Problems gemessen, das - als Input des Algorithmus - einer Lösung fest vorgegebener Güte zugeführt werden soll. Wird die Länge der Problemspezifizierung durch die Variable  $L$  gemessen, so besteht das Ergebnis der Effizienzanalyse aus der Angabe einer oberen Schranke  $S(L)$  für den Ressourcen-(Faktor-)verzehr  $F(L)$  derart, daß jedes Problem aus der vorausgesetzten Problemklasse mit beliebiger(!) Länge  $L$  innerhalb dieser Ressourcenverzehrsschranke - bis auf einen beliebigen konstanten Betrag  $f$  - gelöst werden kann:

$$\bigvee_{f \in \mathbb{R}^+} \left[ \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{R(L)}{S(L)} \leq f \right]$$

Dieser Sachverhalt wird auch vereinfacht ausgedrückt durch die Feststellung, der Ressourcenverzehr  $R(L)$  sei von der Ordnung  $S(L)$  - kurz:

$$R(L) = O[S(L)]$$

Dieses abstrakte, relative Effizienzmaß  $O[S(L)]$  ist zunächst ein unscharfes Maß, da es nur eine obere Schranke, aber nicht notwendig die kleinste obere Schranke (obere Grenze) darstellt. Ferner erlaubt die relative Formulierung der Schranke  $S(L)$  für reale Probleme endlicher Länge  $L$  keine unmittelbare Aussage, da sie unter Grenzwertbedingungen abgeleitet worden ist. Daher kann sich ein Algorithmus, der von der Komplexitätstheoretischen Effizienzanalyse als "ineffizient" (im Grenz-

fall  $L \rightarrow \infty!$ ) nachgewiesen wird, bei einer konkreten Anwendung auf ein Problem endlicher Länge  $L$  durchaus als "effizient" erweisen.

- Der Effizienzbegriff der Komplexitätstheoretischen Analyse wird oftmals auf die stark vergrößernde Dichotomie reduziert, Algorithmen genau dann zu klassifizieren als:
  - = effizient, wenn ihre oberen Schranken  $S(L)$  ein Polynom beliebiger Ordnung darstellen (kurz: die Algorithmen sind polynomial beschränkt), und als
  - = ineffizient, wenn ihre oberen Schranken  $S(L)$  durch kein Polynom mehr ausgedrückt werden können. Im hier interessierenden Fall der Zuordnungsprobleme mit zugrundeliegender kombinatorischer Struktur nehmen die oberen Schranken dann die Form einer exponentiellen Funktion der Problemlänge an (kurz: die Algorithmen sind exponentiell beschränkt).

Für Probleme endlicher Länge kann eine exponentielle Funktion  $S(L)$  jedoch durchaus einen kleineren Wert als ein Polynom  $S(L)$  annehmen. Folglich darf der Effizienzbegriff der Komplexitätstheorie im strengen Sinne nur auf Probleme angewendet werden, deren Länge jede obere Schranke überschreitet und die infolgedessen keine adäquaten Abbilder realer Probleme mehr darstellen können. Daher können Effizienzaussagen der worst case-Analyse nur als Tendenzurteile unter der Prämisse verstanden werden, daß die unter Grenzwertbedingungen abgeleiteten Aussagen auch noch unter endlichen Bedingungen unverändert gelten:

- Die worst case-Effizienz ist nicht eindeutig definiert, sondern variiert mit unterschiedlichen Festlegungen des Maßstabs für den Ressourceneinsatz. In der Informationsverarbeitung sind die Maßstäbe "Rechenzeit" und "Speicherplatzbedarf" üblich. Beide Größen sind jedoch ihrerseits mehrdeutig. So ist es offen, auf welche Komponente einer ADV-Anlage sich die Rechenzeit beziehen soll, z. B. ob die nur des Zentralprozessors oder diejenige einschließlich der Ein-/Ausgabekomponenten. Vor allem hängen aber beide Merkmale nicht nur vom betrachteten Algorithmus ab, sondern auch von den informationstechnischen Spezifika der jeweils zur Verfügung stehenden ADV-Anlage.
- Daher greift die Analyse der worst case-Effizienz auf abstrakte, implementierungsunabhängige Maßstäbe für den Ressourcenverzehr zurück; diese besitzen jedoch keinen direkten Bezug mehr zu realen Verzehrgrößen. Im folgenden werden als solche Maßstäbe
  - = die Anzahl notwendiger Sortierzyklen (für die Basiskomponente),
  - = die Anzahl erforderlicher Zulässigkeitsprüfungen (für die Eröffnungskomponente) und
  - = die Anzahl zu analysierender Knoten im Lösungsbaum (für die Verbesserungskomponente)

gewählt. Diese Maßstäbe sind für die betrachteten Teilalgorithmen zwar strukturadäquat, doch können sie nicht mehr unmittelbar miteinander verglichen werden. Der Grund dafür ist, daß ein Sortierzyklus, eine Zulässigkeitsprüfung und

eine Knoten-Analyse keineswegs den gleichen realen Ressourcenverzehr bedingen. Es kann noch nicht einmal die reale Konstanz der Maßeinheit innerhalb desselben Teilalgorithmus gewährleistet werden, da sich zwei verschiedene Sortierzyklen, zwei unterschiedliche Zulässigkeitsprüfungen<sup>8)</sup> oder zwei verschiedene Knoten-Analysen durchaus beträchtlich, insbesondere hinsichtlich der involvierten Rechenzeiten und Speicherplatzbelegungen, unterscheiden können.

- Da sich die Ziele der Rechenzeit- und Speicherplatzbedarfsminimierung unter den derzeit herrschenden informationstechnischen Voraussetzungen konfliktär zueinander verhalten, müßten für eine worst case-Effizienzuntersuchung streng genommen dominante Paare unterschiedlicher Rechenzeit-Speicherplatzbedarf-Kombinationen angegeben werden. Im folgenden wird jedoch, wie erwähnt, vereinfachend nur auf die Ersatzmaßstäbe "Zyklen-", "Prüf-" und "Analyseanzahl" für die Rechenzeit abgestellt.
- Ferner wird die Sensitivität der worst case-Effizienz gegenüber der Art der Problemcodierung nicht näher berücksichtigt. Sie resultiert daraus, daß die Effizienz eines Algorithmus durch eine strukturell angepaßte Codierungsweise der Problemformulierung als Algorithmusinput positiv beeinflußt werden kann. Hier wird jedoch von solchen Codierungstechniken abstrahiert.

Unter den o.a., hinsichtlich des Aussagewertes von worst case-Analysen der Komplexitätstheorie erhebliche Bedenken begründenden Einschränkungen kann - vorab - festgehalten werden, daß den vorgestellten Verbesserungskomponenten zur Lösung des zugrundeliegenden EIS-Zuordnungsmodells hinsichtlich seines Ressourcenverzehrs Ineffizienz attestiert werden muß. Die Verbesserungskomponenten sind ja insgesamt nicht polynomial, sondern bloß exponentiell beschränkt. Selbstverständlich wäre dieses Ergebnis bezüglich des Ausmaßes der Ineffizienz noch nach den Komponenten des gesamten Lösungsalgorithmus zu differenzieren.

Die Basiskomponente bereitet noch keine Effizienzschwierigkeiten, da sie nicht nur polynomial, sondern sogar logarithmisch beschränkt<sup>9)</sup> ist, und zwar hinsichtlich derjenigen Sortierzyklen, die erforderlich sind, um - auch noch im ungünstigsten aller möglichen Fälle - die Entscheidungsvariablen  $x_{rh}$  in descendenter Reihenfolge der zugehörigen Nettonutzen-Schätzwerte anzuordnen. Als Sortieralgorithmus kann beispielsweise das zweiphasige 3-Band-Mischen nach Wirth gewählt werden. Es vermag jeden Sortierinput der Länge  $L$  - hier mit  $L = w'$  als Anzahl zu sortierender Entscheidungsvariablen - in maximal  $\log_2 L$  Sortierzyklen zu bearbeiten. Folglich gilt für die Komplexität des Teilalgorithmus der Basiskomponente:  $S(L) = \log_2 L$ .

Der Teilalgorithmus der Eröffnungskomponente erweist sich ebenso wie der der Basiskomponente als effizient, da er sich hinsichtlich der Anzahl erforderlicher Zulässigkeitsprüfungen polynomial beschränkt verhält: Um die  $L = w'$  Entscheidungsvariablen  $x_{rh}$  in ihren Werten zu bestimmen, müssen genau  $L$  Zulässigkeitsprüfungen durchgeführt werden, so daß hier die obere Schranke der Prüfanzahl in einfacher Weise durch  $S(L) = L$  gegeben ist.

Wird der Maßstab des Ressourceneinsatzes von der Anzahl notwendiger Zulässigkeitsprüfungen verfeinert zur Anzahl zu überprüfender Restriktionen, so ergibt sich als - ebenfalls polynomiale - Schranke des Ressourcenverzehrs (s.a. Abschnitt 4.1):

$$S(m,n,v) = [(m+v) \cdot n + m] \cdot m \cdot n \quad (\text{mit } m \cdot n = w)$$

Da es sich bei dieser Angabe um eine worst case-Analyse handelt, mußte unterstellt werden, daß die Zulässigkeitsprüfung durch Nachweis einer Restriktionsverletzung nicht vorzeitig abgebrochen werden kann, sondern daß sie erst nach dem Test der letzten Restriktion mit einem definitiven Ergebnis endet. Ferner zeigt sich hier deutlich, daß nur eine obere Schranke und nicht eine obere Grenze des Ressourceneinsatzes ermittelt wird. Durch den Übergang vom Maß  $L=w'$  für die Länge des Problem-inputs - es ist durch die Anzahl von Entscheidungsvariablen mit zugehörigen positiven Nettonutzen-Schätzwerten gegeben - hin zu den differenzierteren Teilmaßen  $m$ ,  $n$  und  $v$  für die Anzahlen der Meßgerätearten, der Meßorte bzw. Klassen von Meßgerätearten werden grundsätzlich alle  $m \cdot n$  Entscheidungsvariablen einbezogen. Die mögliche Reduktion des Ressourceneinsatzes durch die Relevanz von nur  $w' < m \cdot n$  Entscheidungsvariablen wird hierdurch nicht mehr berücksichtigt.

Der Teilalgorithmus der Verbesserungskomponente führt dagegen, sofern Lösungen optimaler Güte intendiert werden, insgesamt zur Ineffizienz des Lösungsalgorithmus für das EIS-Zuordnungsmodell. Der Grund ist, daß dieser Teilalgorithmus - sowohl hinsichtlich der (primalen) Variante  $VK_1$ , als auch in bezug auf ihr Dual  $VK_4$  - unter worst case-Bedingungen nicht mehr polynomial, sondern nur noch exponentiell beschränkt ist. Obwohl sich durch beide Varianten die Suche im Lösungsbaum, dessen Gesamtknotenanzahl bei  $w'$  binären Entscheidungsvariablen kombinatorisch als  $ak = 2^{w'}$  bestimmt ist, um die Teilmengen solcher Knoten beschränken läßt, die entweder Nachfolgerknoten des die Eröffnungslösung darstellenden Knotens sind (Übergang von der Gesamtknotenanzahl  $ak$  auf die reduzierte Anzahl ( $ak' \leq ak$ ) oder - nur hinsichtlich der Verbesserungskomponente  $VK_4$ , deren Zielfunktionswerte unter dem Zielfunktionswert der Eröffnungslösung liegen, hängt es doch von der individuellen Eigenart eines jeden Zuordnungsproblems ab, welchen Anteil diese Teilmengen an der Gesamtanzahl aller kombinatorisch möglichen Lösungen jeweils darstellen.

Infolge der worst case-Prämisse muß davon ausgegangen werden, daß die Anzahl der von diesen ausgeschlossenen Teilmengen repräsentierten Lösungen durch eine beliebige, aber feste Konstante limitiert wird. Wird die Problemlänge  $L$  durch die Anzahl  $w'$  der Entscheidungsvariablen gemessen, so ist folglich der Teilalgorithmus der Verbesserungskomponente in der Variante  $VK_1$  oder  $VK_4$  nur von der Ordnung  $S(L') = 2^L = 2^{w'}$ . Bei Außerachtlassen der Eliminierung von Entscheidungsvariablen mit zugehörigen nicht positiven Nettonutzen-Schätzwerten wäre  $S(L) = 2^L = 2^{n \cdot m}$ .

Die Ineffizienz des Teilalgorithmus für die Verbesserungskomponente unter der worst case-Prämisse kann zu drei verschiedenen Folgerungen führen:

- Entweder wird auf die rigiden Voraussetzungen der Komplexitätstheoretischen Analyse, insbesondere ihres Begriffes algorithmischer Ineffizienz, verwiesen. Damit wäre die praktische Relevanz des theoretischen Ineffizienzurteils grundsätzlich in Zweifel zu ziehen.
- Oder es wird aus der Ineffizienz unter der vorausgesetzten optimalen Lösungsgüte auf die Bedeutung der heuristischen Varianten  $VK_2$  und  $VK_3$  der Verbesserungskomponente geschlossen. Diese Varianten vermögen ja - unter nur suboptimalem Anspruch an die Lösungsgüte - den Ressourcenbedarf zur Erzeugung einer gewünschten Lösung erheblich zu reduzieren. Im Grenzfall des Verzichts auf jede Verbesserungskomponente liefert bereits die Eröffnungskomponente eine suboptimale Lösung; sogar unter den Komplexitätstheoretischen Voraussetzungen im worst case-Fall bleibt sie - wie oben dargelegt - durch polynomiale Beschränktheit effizient.
- Schließlich läßt sich aber aus den Problemen der worst case-/Grenzwert-Betrachtungen der Komplexitätstheorie die Forderung nach einer konkreten Algorithmusimplementierung ableiten. Dann ließe sich im Rahmen möglichst repräsentativer Stichproben von Zuordnungsproblemen und realer Ressourcenverzehrmaßstäbe eine - auch implementierungsdeterminierte - algorithmische Durchschnitts- oder Erwartungswert-Effizienz empirisch ermitteln.

## 5 Modellerweiterungen

### 5.1 Umgebungsbezogene Modellerweiterung

Die Umgebung einer durch die Entscheidungsvariable  $x_{ij}$  im Modell repräsentierten Entscheidung über das Zuordnungstupel  $(MG_i, MO_j)$  ist durch die Menge aller Entscheidungen definiert, welche die übrigen zulässigen Zuordnungstupel  $(MG_{i'}, MO_{j'})$  mit  $(i', j') \neq (i, j)$  betreffen.

Das Grundmodell kann erweitert werden, indem die Gültigkeit seiner Separationsprämisse aufgegeben wird: Der Nettonutzen-Schätzwert  $u_{ij}$  kann nun auch von den Entscheidungen über andere Zuordnungstupel  $(MG_{i'}, MO_{j'})$  betroffen werden.

Hierdurch ist es beispielsweise möglich, folgende Konstituenten des Realproblems im erweiterten Modell abzubilden:

- Der Nettonutzen-Schätzwert für ein Meßgerät der Meßgeräteart  $MG_i$  wird am Meßort  $MO_j$  durch Synergieeffekte gegenüber seiner isolierten Zuordnung erhöht, wenn am gleichen Meßort ( $j'=j$ ) auch Meßgeräte anderer Meßgerätearten  $MG_{i'}$  ( $i' \neq i$ ) installiert werden.
- Der Nettonutzen-Schätzwert für mehrere Meßgeräte derselben Meßgeräteart  $MG_i$  fällt bei Zuordnung auf mehrere Meßorte höher aus als bei der Zuordnung nur eines Meßgerätes zu einem Meßort, wenn die Kosten der Meßergebnisauswertung der betroffenen Meßgeräteart unterproportional in bezug auf das Meßvolumen ansteigen.
- Die Summe der Nettonutzen-Schätzwerte für Meßgeräteinstallationen bei isolierter Betrachtung kann erhöht werden, und zwar auf einen größeren Nettonutzen-Gruppenschätzwert für eine als Gesamtheit betrachtete Gruppe von Meßgeräteinstallationen, wenn diese bestimmte Teile von Datenübertragungsleitungen gemeinsam nutzen.

Insbesondere Einflüsse von Seiten der Gestaltung des Datenübertragungsnetzes und der Auswertungsverfahren für die Meßergebnisse können - wie oben exemplarisch angedeutet - durch die (von der Umgebung abhängende) Bestimmung der Nettonutzen-Schätzwerte in das Zuordnungsmodell einbezogen werden. Das erhebliche Problem, für alle als zulässig betrachteten Umgebungsvarianten (kombinatorische Explosion!) die zugehörigen Nettonutzen-Schätzwerte zu ermitteln, wird über die Informationsprämisse als gelöst vorausgesetzt.

In einer ersten Erweiterungsvariante könnte das Zuordnungsmodell um die Umgebungsabhängigkeit der Nettonutzen-Schätzwerte ergänzt werden, wenn die Nettonutzen-Schätzfunktion  $u$  zu einem vom Entscheidungsraum ER abhängigen Nettonutzen-Schätzfunktional  $U(ER)$  hin modifiziert wird. Dieses Funktional vermag für jede Entscheidungsalternative  $a_n$  eine andere Nettonutzen-Schätzfunktion  $u(a_n)$  zu spezifizieren, und zwar mit:

$$u(e_h): \{MG_i \mid i \in (1,1,m)\} \cdot \{MO_j \mid j \in (1,1,n)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(MG_i, MO_j) \longmapsto u(e_h)(MG_i, MO_j) = u_{ij}(e_h)$$

Diese Erweiterungsvariante wird jedoch nur in Sonderfällen problemadäquat sein, weil sie - im Gegensatz zur uneingeschränkten Aufgabe der Separationsprämisse - weiterhin implizit die Zurechnung des geschätzten Nettonutzens auf jedes einzelne Zuordnungstupel  $(MG_i, MO_j)$  unterstellt. Hierdurch werden gerade Verbundeffekte<sup>i</sup>, die durch gemeinsame, umgebungsabhängige Entscheidungen über mehrere solcher Zuordnungstupel hervorgerufen werden und die zu Gemeinnettonutzen-Schätzwerten für die Gruppe (!) aller involvierten Entscheidungen führen, entweder nicht erfaßt oder verzerrend einzelnen Zuordnungstupeln zugerechnet.

Daher ist im allgemeinen Fall eine zweite Erweiterungsvariante vorzuziehen, die das Nettonutzen-Schätzfunktional  $U(ER)$  ersetzt, und zwar durch folgende modifizierte Nettonutzen-Schätzfunktion  $\hat{u}$ , die nur noch auf die Entscheidungsalternativen Bezug nimmt:

$$\hat{u}: ER \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$e_h \longmapsto \hat{u}(e_h)$$

Im Gegensatz zur Nettonutzen-Schätzfunktion  $u$ , die unter der Voraussetzung der Separationsprämisse formuliert worden ist, muß für die modifizierte Nettonutzen-Schätzfunktion  $\hat{u}$  keineswegs mehr gelten, daß jeder Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  als Komponente des Entscheidungsvektors  $e_h$  durch ein Nettonutzen-Schätzwert  $\hat{u}(x_{ij}) = \hat{u}_{ij}$  zugeordnet werden könnte.

#### Konsequenzen für die Modellösung:

Es ist möglich, den Algorithmus zur Lösung des Grundmodells in seinen ersten beiden Verbesserungskomponenten  $VK_1$  und  $VK_2$  unverändert anzuwenden, weil das zugrundegelegte Branch and Bound-Verfahren in jedem Knoten des Lösungsbaums, der eine vollständige Entscheidungsalternative  $e_h$  repräsentiert, ohnehin den Nettonutzen-Schätzwert dieser Alternative neu berechnet. Je nach Variante der hier betrachteten Modellerweiterung muß lediglich die Zielfunktion  $z(e_h) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot x_{ij}$  des Grundmodells ersetzt werden durch:

$$- z(e_h) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}(e_h) \cdot x_{ij}$$

$$- \hat{z}(e_h) = \hat{u}(e_h)$$

Dagegen kann die Verbesserungskomponente  $VK_3$  nicht oder nur mit einem zusätzlich suboptimierenden Effekt angewendet werden, wenn im allgemeinen Fall die Zielfunktion nur als  $\hat{z}(e_h) = \hat{u}(e_h)$  gegeben ist. Der Grund ist, daß die Kantenbewertungen  $\Delta u_{hh}$  für den Lösungsbaum dann nicht mehr in der von der Verbesserungskomponente  $VK_3$  unterstellten einfachen Weise berechnet werden können; die hierfür notwendigen Werte  $u_{ij}(e_h)$  und  $u_{i'j'}(e_h)$  sind nämlich nicht mehr bekannt.

Ebenso kann der Algorithmus zur Lösung des Grundmodells in seiner Eröffnungskomponente nicht übernommen werden. Diese Komponente unterstellt ja eine a priori-Kennntnis der Nettotonutzen-Schätzwerte  $u_{ij}$ , die in der Modellerweiterung als  $\hat{u}(e_h)$  aber erst a posteriori zur Verfügung steht, d. h. nach der vollständigen Erzeugung einer Eröffnungslösung, und zwar in Gestalt einer beliebigen zulässigen Entscheidungsalternative  $e_h$ .

Dieser Umstand bereitet jedoch keine wesentlichen Probleme, weil der Teilalgorithmus der Verbesserungskomponente unter geringfügigen Modifikationen auch als (einstufiger) Vollalgorithmus zur Lösung des erweiterten Zuordnungsmodells eingesetzt werden kann: Statt die Eröffnungslösung im Lösungsbaum als Startknoten zu wählen, wird stets die Baumwurzel im modifizierten Algorithmus als Startknoten gewählt. Es handelt sich dabei notwendig um eine zulässige Lösung; diese setzt jedoch mit dem Nettotonutzen-Schätzwert  $z(e_1=0) = \hat{z}(e_1=0) = 0$  mit 0 als Nullmatrix eine sehr geringe erste Untergrenze für die Zielfunktion fest. Als Konsequenz steigt tendenziell die Anzahl der Algorithmusschritte bis zum Erreichen der gewünschten Lösung im erweiterten Modell gegenüber dem Grundmodell an.

Infolge der modifizierten Startknotenfestlegung muß auch der Algorithmusbeginn leicht verändert werden:

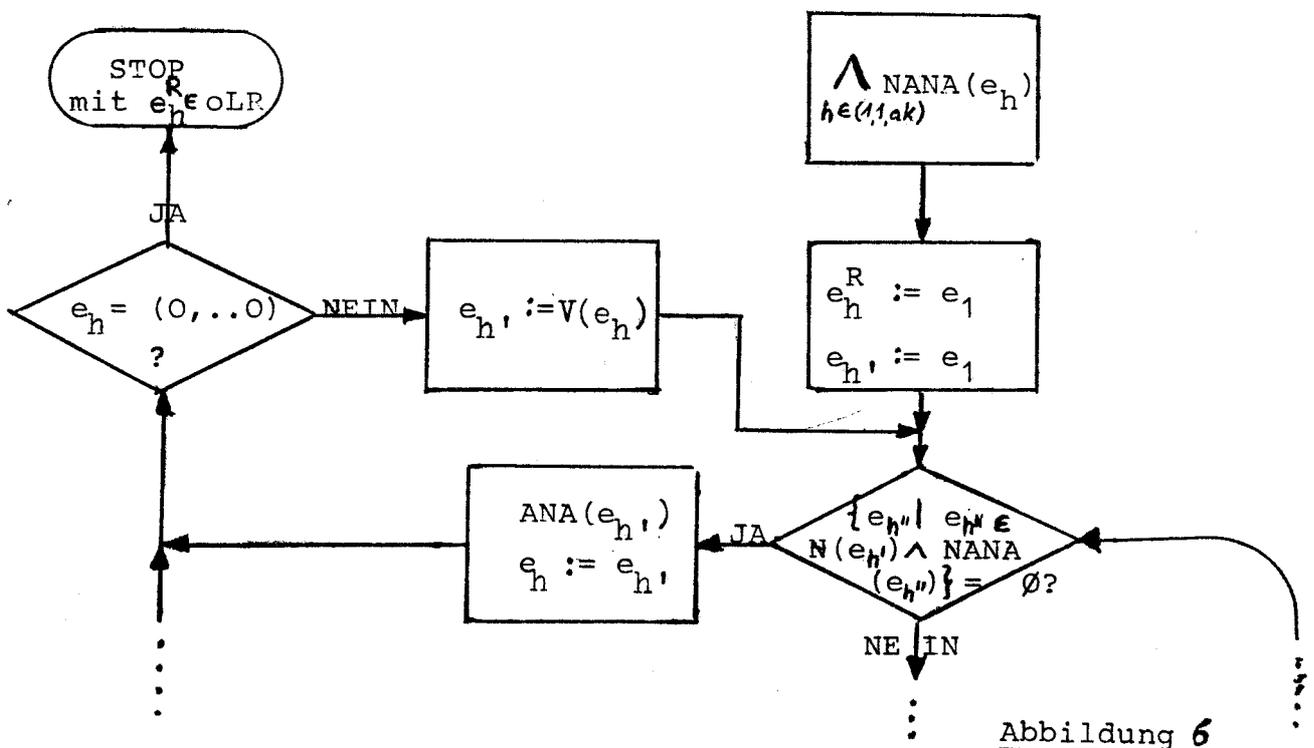


Abbildung 6

Eine Reduktion des Lösungsbaums derart, daß - wie beim Lösungsalgorithmus für das Grundmodell - alle Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  mit  $u_{ij} \leq 0$  eliminiert werden, ist bei der umgebungsbezogenen Modellerweiterung allerdings nicht mehr möglich. Der Grund dafür ist, daß entweder einzelne Werte  $u_{ij}$  nicht mehr definiert sind oder daß sie als Werte  $u_{ij}(e_h)$  zwar noch definiert vorliegen, jedoch - infolge der möglichen Verbundeffekte - ebenfalls Entscheidungsvariable  $x_{ij}$  mit  $u_{ij}(e_h) \leq 0$  entscheidungsrelevant sein können.

## 5.2 Zielsystembezogene Modellerweiterung

Das dem Zuordnungsmodell ursprünglich zugrundegelegte nur monodimensionale Formalzielsystem kann auf beliebig, aber endlich viele Formalzielkriterien erweitert werden:

- Satisfikations- und Fixpunktziele können über einfache bzw. (konjunktiv verknüpfte) doppelte Ungleichungen als zusätzliche Restriktionen formuliert werden, und zwar ohne eine qualitativ verändernde Auswirkung auf den Algorithmus zur Lösung des Grundmodells. Lediglich bei den Prüfungen der Zulässigkeit betrachteter Lösungen müssen jetzt mehr Restriktionen hinsichtlich ihrer Einhaltung getestet werden, als es beim Grundmodell der Fall ist. Es erfolgt demnach nur eine quantitative Veränderung (tendenzielle Erhöhung) des Aufwandes zur Durchführung des Algorithmus.
- Extremalziele können in der Gestalt zusätzlicher Zielfunktionen und zugehöriger Zielfunktionsoperatoren (zur Minimierung oder Maximierung der Zielfunktionswerte) formuliert werden. Sie müssen um die formale Abbildung eines Kriteriums zur Lösung von Zielkonflikten ergänzt werden.

Im Falle von  $az$  verschiedenen Zielfunktionen  $z_k$  mit der Indexmenge  $(1,1,az)$  die als zu maximierende Funktionen angenommen werden können, läßt sich in einem erweiterten Zuordnungsmodell die formale Abbildung des Dominanzkriteriums wie nachstehend formulieren. Dabei definiert das Kriterium jede zulässige Lösung  $e_h$  als optimal, die von keiner anderen zulässigen Lösung dominiert wird. Mit anderen Worten existiert zu ihr keine andere zulässige Lösung  $e_{h'}$ , die für alle Zielfunktionen mindestens so hohe Werte wie die Referenzlösung sowie für mindestens eine Zielfunktion einen echt höheren Wert als die Referenzlösung aufwies. Mit  $oLR$  als modifizierter Definition des optimalen Lösungsraums gilt:

$$oLR = \left\{ e_h \mid e_h \in zLR \wedge \left( \bigwedge_{e_{h'} \in zLR \setminus \{e_h\}} \left[ \left( \bigwedge_{k \in (1,1,az)} z_k(e_{h'}) \geq z_k(e_h) \right) \wedge \left( \bigvee_{k' \in (1,1,az) \setminus \{k\}} z_{k'}(e_{h'}) > z_{k'}(e_h) \right) \right] \right) \right\} \iff$$

$$oLR = \left\{ e_h \mid e_h \in zLR \wedge \left( \bigwedge_{e_{h'} \in zLR \setminus \{e_h\}} \left[ \left( \bigvee_{k \in (1,1,az)} z_k(e_{h'}) < z_k(e_h) \right) \vee \left( \bigwedge_{k' \in (1,1,az) \setminus \{k\}} z_{k'}(e_{h'}) \leq z_{k'}(e_h) \right) \right] \right) \right\}$$

### Konsequenzen für die Modelllösung:

Eine solche Erweiterung des Formalzielsystems um Extremalziele und um das Dominanzkriterium wirkt sich auf den Algorithmus zur Lösung des Grundmodells partiell in einer qualitativ verändernden Weise aus:

- = Die Verbesserungskomponenten werden qualitativ nicht betroffen, da für jeden Knoten des Lösungsbaums sämtliche Zielfunktionswerte, und zwar als quantitative Veränderungen gegenüber nur einem einzelnen Zielfunktionswert im Grundmodell, ermittelt werden können. Nach dem Dominanzkriterium läßt sich ohne qualitative Änderung der Struktur des Teilalgorithmus prüfen, ob die betrachtete Lösung - sofern sie zulässig ist - die zuletzt erzeugte Referenzlösung dominiert. Diese Prüfung tritt an die Stelle des Tests im Grundmodell, ob die betrachtete Lösung, sofern sie zulässig ist, einen höheren Zielfunktionswert als die zuletzt erzeugte Referenzlösung aufweist.
- = Die Eröffnungskomponente wird qualitativ dadurch betroffen, daß die Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  im Regelfall nicht mehr in der einfachen linearen Weise des Grundmodells angeordnet werden können, weil sich für jedes Zielkriterium eine, entsprechend zum Lösungsalgorithmus für das Grundmodell konstruierte andere Entscheidungsvariablen-Sequenz ergeben kann.

Dennoch kann der Lösungsalgorithmus des Grundmodells mit geringfügigen Modifikationen weiterverwendet werden:

- Wenn eine Eröffnungskomponente beibehalten werden soll, kann im Sinne der Zieldominanz eine Linearisierung der Entscheidungsvariablen-Anordnung vorgenommen werden, indem der Entscheidungsträger hierfür ein Zielkriterium aus seiner Menge extremaler Formalziele auswählt.
- Es kann auf die Eröffnungskomponente verzichtet und der modifizierte Lösungsalgorithmus wie bei der umgebungsbezogenen Modellerweiterung angewandt werden.

### 5.3 Zeitbezogene Modellerweiterung

Eine Erweiterung (Relaxation) der Prämissen der Einstufigkeit und Einperiodizität kann erfolgen, indem ein in mehrere Perioden unterteilter Meßzeitraum  $[T_A; T_E]$  zugelassen wird; dabei bedeuten  $T_A$  den Zeitpunkt, in dem die erste Messung möglich ist, und  $T_E$  den Zeitpunkt, vor dem die letzte Messung durchgeführt sein muß. Dabei sei o.B.d.A.  $T_A, T_E \in \mathbb{N}_0$  vorausgesetzt, so daß jedes Teilintervall  $[t; t+1[$  mit  $t \in \mathbb{N}_0$  und  $T_A \leq t \leq T_E$  als eine äquivalente Teilperiode  $p_t$  aufgefaßt werden kann. Hierdurch wird es möglich,

- sowohl in verschiedenen Teilperioden - und somit mehrstufig - Entscheidungen über Zuordnungen von Meßgerätearten und Meßorten zu treffen,

---

\* ) ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit

- als auch die nettonutzenrelevanten Auswirkungen einer - in einer Referenzperiode getroffenen - Entscheidung über eine solche Zuordnung in mehreren Folgeperioden abzubilden.

Hierdurch läßt die zeitbezogene Modellerweiterung z. B. ein (teil-)kinetisches ("dynamisches") Entscheidungsmodell zu. In diesem Modell hängen die Entscheidungen über Zuordnungen von Meßgerätearten und Meßorten während einer Referenzperiode von der Auswertung der Meßergebnisse ihrer Vorgängerperioden ab. So kann beispielsweise durch ein Meßergebnis der Verdacht auf eine betriebliche Schwachstelle begründet werden. Die Folge wäre, daß sich die Nettonutzen-Schätzwerte für diejenigen Zuordnungstupel  $(MG_i, MO_j)$ , die weitere Aufschlüsse über diese Schwachstelle bei positiver Entscheidung liefern könnten, erhöhen. Insofern wird auch die Informationsprämissen zeitbezogen abgeschwächt: Die Nettonutzen-Schätzwerte  $u_{ij}$  müssen a priori nicht für sämtliche Perioden bekannt sein, sondern nur für die erste Entscheidungsperiode  $P_1$  mit  $t = T_A$ . Für alle Folgeperioden brauchen die Nettonutzen-Schätzwerte erst a posteriori zur Verfügung zu stehen, allerdings in dem eingeschränkten Sinne, daß sie spätestens zu Beginn der Periode bekannt werden, in der eine Entscheidung erfolgen soll (inkrementelle Erweiterung des Informationsstandes  $I_\tau$ ). Daher müssen die Nettonutzen-Schätzwerte um einen Index ergänzt werden, der die Periode der Schätzwertermittlung identifiziert.

Ferner erlaubt die zeitbezogene Modellerweiterung Entscheidungen über die Meßintensität: Je größer der Anteil der Perioden, in denen ein Meßgerät aus einer Klasse von Meßgerätearten einem Meßort zugeordnet wird, an der Gesamtanzahl aller Perioden im Meßzeitraum ist, desto höher fällt die Meßintensität derjenigen Meßdatenart an dem betroffenen Meßort aus, die durch die Meßgeräteartenklasse repräsentiert wird.

Die Zuordnungsfunktion  $x$  des Grundmodells muß durch ein Zuordnungsfunktional ersetzt werden, das jeder Teilperiode  $p_t$  eine andere Zuordnungsfunktion  $x(p_t)$  zuweisen kann:

$$x(p_t): \{MG_i \mid i \in (1,1,m)\} \cdot \{MO_j \mid j \in (1,1,n)\} \longrightarrow \{0; 1\}$$

$$(MG_i, MO_j) \longmapsto x(p_t)(MG_i, MO_j) = x_{ijt}$$

Da die Festlegung dieser Entscheidungsvariablen  $x_{ijt}$  unter verschiedenen Informationsständen  $I_\tau$  in unterschiedlicher Weise erfolgen kann, ist dieses Zuordnungsfunktional derart zu erweitern, daß jeder Teilperiode  $p_t$  und jedem Informationsstand  $I_\tau$  mit  $\tau \leq t$  eine andere Zuordnungsfunktion  $x(p_t, I_\tau)$  zugeschrieben werden kann:

$$x(p_t, I_\tau): \{MG_i \mid i \in (1,1,m)\} \cdot \{MO_j \mid j \in (1,1,n)\} \longrightarrow \{0; 1\}$$

$$(MG_i, MO_j) \longmapsto x(p_t, I_\tau)(MG_i, MO_j) = x_{ijt\tau}$$

Die Nettonutzen-Schätzfunktion  $u$  des Grundmodells muß derart erweitert werden, daß sie jedes Zuordnungstupel  $(MG_i, MO_j)$

auf denjenigen Vektor abbildet, welcher die Nettonutzen-Schätzwerte für dieses Tupel enthält. Diese Werte erstrecken sich auf die maximal  $T$  Perioden  $p_{t+b}$  mit  $b \in (1, 1, T)$ , die auf diejenige Referenzperiode  $p_t$  folgen, in welcher die Zuordnung entschieden worden ist,

sowie auf diese Referenzperiode  $p_t$  selbst:

$$u: \{t \mid t \in (T_A, 1, T_E - 1)\} \cdot \{MG_i \mid i \in (1, 1, m)\} \cdot \{MO_j \mid j \in (1, 1, n)\} \rightarrow \mathbb{R}^{(T+1)}$$

$$(t, MG_i, MO_j) \mapsto u(t, MG_i, MO_j) = (u_{ijt}, u_{ij(t+1)}, \dots, u_{ij(t+T)})$$

**Nebenbemerkung:**

Sind für einige Tupel  $(t, MG_i, MO_j)$  Nettonutzen-Schätzwerte nur für  $T'$  Folgeperioden  $p_{t+b}$  mit  $T' < T$  bekannt, so können für die Restperioden  $p_{t+b}$  mit  $b > T'$  die Schätzwerte  $u_{ij(t+b)} = 0$  angenommen werden.

Infolge dieser zeitlichen Nachwirkungen einer im Meßzeitraum  $[T_A; T_E]$  getroffenen Entscheidung über die Zuordnung von Meßgerätearten und Meßorten erweitert sich der Entscheidungszeitraum auf das Intervall  $[T_A; T_E + T]$ .

Da die Nettonutzen-Schätzwerte in Abhängigkeit von der Auswertung vergangener Meßergebnisse ermittelt werden können, muß die o.a. modifizierte Nettonutzen-Schätzfunktion noch ersetzt werden durch ein Nettonutzen-Schätzfunktional. Es kann jedem Informationsstand  $I_\tau$  mit  $T_A \leq \tau < T_E$  eine andere Nettonutzen-Schätzfunktion  $u(I_\tau)$  zuordnen mit:

$$u(I_\tau): \{t \mid t \in (\tau, 1, T_E - 1)\} \cdot \{MG_i \mid i \in (1, 1, m)\} \cdot \{MO_j \mid j \in (1, 1, n)\} \rightarrow \mathbb{R}^{(T+1)}$$

$$(t, MG_i, MO_j) \mapsto u(I_\tau)(t, MG_i, MO_j) = (u_{ijt\tau}, u_{ij(t+1)\tau}, \dots, u_{ij(t+T)\tau})$$

Da die Anzahl der von jeder Meßgeräteart  $MG_i$  zur Verfügung stehenden Meßgeräte im Zeitablauf schwanken kann, muß diese Anzahl für jede Periode  $p_t$  des Meßzeitraums als Größe  $a_{it}$  vorgegeben sein.

Die Zielfunktion muß so modifiziert werden, daß sie sämtliche Nettonutzen-Schätzwerte des Entscheidungszeitraums unter der Prämisse eines gegebenen Informationsstandes  $I_\tau$  der Periode  $p_\tau$  erfaßt. Dies kann beispielsweise erfolgen als:

- eine ungewichtete Summe der Nettonutzen-Schätzwerte für alle Perioden  $p_t$  des Entscheidungszeitraums:

$$z_\tau(e_h) = \sum_{t=T_A}^{T_E-1} \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[ \left( \sum_{b=0}^T u_{ij(t+b)\tau} \right) \cdot x_{ijt\tau} \right] \right)$$

- eine mit dem Diskontierungsfaktor  $q$  gewichtete Summe (Kapitalwert) der Nettonutzen-Schätzwerte der einzelnen Perioden  $p_t$  des Entscheidungszeitraums, und zwar mit Bezug auf dessen Anfangszeitpunkt  $t_A$ :

$$z_{\tau}(e) = \sum_{t=T_A}^{T_E-1} q^{-(t-t_A)} \cdot \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[ \left( \sum_{b=0}^{\tau} u_{ij}(t+b) \tau \right) \cdot x_{ij t \tau} \right] \right)$$

Tritt eine Veränderung des Informationsstandes  $I_{\tau}$  in der Periode  $p_{\tau'}$  ein, so können - im Gegensatz zur ersten Entscheidungsperiode  $p_{\tau}$  mit  $\tau = T_A$  - nicht mehr alle Entscheidungsvariablen  $x_{ij t \tau}$  mit  $\tau \in [T_A; T_E]$  frei disponiert werden, weil die Möglichkeit ihrer Festlegung im zurückliegenden Meßzeit(teil)raum  $[T_A; \tau]$  bereits ausgeschöpft wurde. Daher bedeutet jede Veränderung des alten Informationsstandes  $I_{\tau}$  zum neuen Informationsstand  $I_{\tau'}$  eine Erweiterung des Modells um  $(\tau' - \tau) \cdot m \cdot n$  Restriktionen. Werden diese bereits erfolgten Festlegungen ausgedrückt mit  $\bar{x}_{ij t \tau}$  ( $\bar{e}_{h t \tau}$ ) als Werte dieser Festlegungen unter dem vorangehenden Informationsstand  $I_{\tau}$  mit  $\tau < \tau'$ , so gilt:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \wedge \quad \wedge \quad \wedge \\ t \in (T_A, \tau'-1) \quad i \in (1, m) \quad j \in (1, n) \end{array} \quad x_{ij t \tau'} = \bar{x}_{ij t \tau} \\ \text{oder:} \quad \begin{array}{c} \wedge \quad \wedge \\ t \in (T_A, \tau'-1) \quad h \in (1, m \cdot n) \end{array} \quad e_{h t \tau'} = \bar{e}_{h t \tau} \end{array}$$

### Konsequenzen für die Modelllösung:

Der zur Lösung des Grundmodells vorgestellte Algorithmus kann bei der zeitbezogenen Modellerweiterung - vergleichsweise zu den umgebungs- und zielsystembezogenen Modellerweiterungen - nicht mit nur geringfügigen Modifikationen übernommen werden. Wesentliche Gründe hierfür sind:

- die Mehrstufigkeit des Entscheidungsprozesses: Sie führt zu einer Interdependenz der Entscheidungen für die Einzelperioden untereinander; deren Berücksichtigung bei der Ermittlung des optimalen Lösungsraums führt zu erheblich aufwendigeren Lösungsalgorithmen (z.B. nach dem bereits erwähnten Funktionalgleichungsprinzip von Bellman im Rahmen der Dynamischen Optimierung).
- die Variabilität des Informationsstandes  $I_{\tau}$ : Da sich bei jeder Änderung dieses Informationsstandes die Nettonutzen-Schätzwerte  $u_{ij t \tau}$  ändern können und mit ihnen die Zielfunktionswerte  $z(e_h)$  aller Entscheidungsalternativen  $e_h$ , muß bei jeder solchen Änderung der optimale Lösungsraum  $oLR_{\tau}$  von neuem bestimmt werden.

Auf eine Darstellung des jetzt erforderlichen Algorithmus wird hier (allerdings) verzichtet.

Modifizierungen (Vereinfachungen) der zeitbezogenen Modellerweiterung lassen sich z. B. in der Hinsicht durchführen, daß nicht mehr in jeder Meßperiode  $p_t$  Entscheidungen über Zuordnungen von Meßgerätearten und Meßorten zulässig sind, sondern nur noch in ausgezeichneten Entscheidungsperioden  $p_s$  mit  $\{s \mid s \in \mathbb{N}_0 \wedge T_A \leq s < T_E\} \subset (T_A, 1, T_E)$  als Menge aller Entscheidungsperioden. Nur noch für diese Entscheidungsperioden  $p_s$  definiert das Zuordnungsfunktional zugehörige Zuordnungsfunktionen  $x(p_s)$ . Bei fest vorgegebenen Entscheidungsperioden, die nicht alle Meßperioden abdecken, werden der Aufwand für die Modellösung sowie der Freiraum der Meßprozeßgestaltung gleichermaßen eingeschränkt.

Die Möglichkeit einer Erweiterung besteht darin, daß die Anzahlen  $a_{it}$  der in jeder Meßperiode  $p_t$  zur Verfügung stehenden Meßgeräte der Meßgerätearten  $MG_i$  nicht mehr als exogen gegeben betrachtet werden. Stattdessen wäre es denkbar,

- die Lebensdauer der Meßgeräte in Abhängigkeit von den Entscheidungen, Meßgeräte auch tatsächlich zu Meßzwecken zuzuordnen, zu definieren. Dabei könnte eine leistungsbezogene Minderung ihres Nutzungspotentials angenommen werden (Einbeziehung von Modellkomponenten der Instandhaltungstheorie).
- die kostenwirksame Bereitstellung zusätzlicher Meßgeräte als weitere Entscheidungsdimension mit zusätzlichen Entscheidungsvariablen und (negativen) Nettonutzen-Schätzwerten für deren Abbildung zuzulassen.

Eine andere Möglichkeit für eine Erweiterung bestände theoretisch noch darin, die Nettonutzen-Schätzwerte  $u_{ij}(t+b)\tau$  in Abhängigkeit von den Zuordnungsentscheidungen für den Meßort  $MO_j$  während der Referenzperiode  $p_t$  vorangehenden Perioden  $p_c$  - mit der Indexmenge  $(T_A, 1, t-1)$  - zu definieren, und zwar unter der Voraussetzung eines unveränderten Informationsstandes  $I_\tau$  mit  $\tau \leq t$ :

$$\bigwedge_{j \in (1,1,n)} \bigwedge_{t \in (T_A+1, T_E-1)} \bigwedge_{b \in (0,1\bar{t})} u_{ij}(t+b)\tau = f(x_{ijc}\tau \mid i \in (1,1,m) \wedge c \in (T_A, 1, t-1))$$

Auf diese Weise könnte z. B. der Erwartung Ausdruck gegeben werden, daß eine Wiederholung der Installation einer bestimmten Meßgeräteart  $MG_i$  an demselben Meßort  $MO_j$  zu geringeren Nettonutzenbeiträgen führt als ihre vorangehende(n) Installation(en). Zu begründen wäre dies damit, daß bei unveränderten Meßkosten die Bruttonutzen-Schätzwerte infolge erkannter und zwischenzeitlich behobener Schwachstellen im meßtechnisch analysierten Produktionssystem bei wiederholter Installation tendenziell sinken werden. Dann müßte für die o.a. allgemeine Funktion  $f$  im besonderen gelten:

$$u_{ij}(t+b)\tau = f_i(x_{ijc}\tau \mid c \in (T_A, 1, t-1))$$

mit

$$\bigwedge_{c \in (T_A, 1, t-1)} \frac{\partial f_i(x_{ijT_A}\tau, x_{ij(T_A+1)}\tau, \dots, x_{ij(t-1)}\tau)}{\partial x_{ijc}\tau} < 0$$

## 6 Probleme bei der Modellquantifizierung

Außer den vorstehend beschriebenen modelltechnischen Fragen tritt noch ein weiteres Hauptproblem in realen Situationen auf. Es zeigt sich bei der nötigen Quantifizierung der verschiedenen Modellparameter, so beim Fixieren der potentiellen Meßorte  $j$ , der infrage kommenden Meßgerätearten  $i$  und ihrer Höchstmengen  $a_{ij}$ . Ganz besonders zeigt es sich aber beim Bemessen der meßstellenspezifischen Nettonutzen-Schätzwerte  $u_{ij}$ ; dies sind die Differenzen zwischen den stellenspezifischen Bruttonutzen-Schätzwerten und den stellenspezifischen Meß- und Auswertungskosten. Während sich die erstgenannten drei Parameterarten ohne sonderliche Schwierigkeiten fixieren lassen werden und auch das Ermitteln der stellenspezifischen einmalig und laufend anfallenden Kosten nicht übermäßig große (Zurechnungs-) Probleme aufwerfen dürfte, zeigen sich beim Schätzen der Bruttonutzen, die von einer jeden Meßort-Meßgeräte-Kombination zu erwarten sind, weit größere Probleme.

Diese Schwierigkeiten resultieren vor allem daraus, daß die Energieeinsparungserfolge, die einen Bruttonutzen begründen, keine festen Beträge sind. Vielmehr hängen sie - für eine in die Lösung einzubeziehende Kombination - von den jeweils zuvor schon verplanten Kombinationen und den über diese bereits vorgesehenen Einsparungen ab. Nur tendenziell läßt sich annehmen, daß die Nettonutzen der einzuplanenden Meßort-Meßgeräte-Kombinationen mit zunehmender Anzahl der in die Lösung bereits einbezogenen Kombinationen abnehmen, d. h. sinkende Grenzerträge, aufweisen werden. Bezüglich der Bewältigung dieses seinerseits informationstheoretischen, aber praxisrelevanten Problems lassen sich derzeit nur gewisse Ideen zu seiner Lösung thesenartig skizzieren:

- Nutzen ist an sich nur ein theoretischer Begriff, der den Aufbau von Theorien erleichtert. Da er kardinal nicht gemessen werden kann, soll er mittels der zu bewertenden Energieeinsparungserfolge zum Ausdruck gebracht werden.
- Die Höhe von Einsparungserfolgen hängt u. a. von der Länge des Ermittlungszeitraums ab und begründet eigentlich eine investitionstheoretische Betrachtungsweise. Eine einperiodige Abbildung dient nur einer Vereinfachung.
- Der periodisierte Bruttonutzen einer Meßstelle kann bei einer Marginalbetrachtung auf zwei verschiedenen Wegen abgeleitet werden, und zwar
  - = durch bereichsbezogene Schätzungen von globalen Energie-mehrverbräuchen, und zwar in Verbindung mit technisch präfixierten oder aus Betriebsvergleichen abgeleiteten Sollverbräuchen (die Globalwerte müssen sodann über iterative Bereichsverkleinerungen stellenspezifisch gesplittet werden),
  - = durch Expertenmeinungen über bereits stellen- (oder bereichs-) spezifisch vermutete Mehrverbräuche.

- Die einzusparenden Energiemengen sind mit den energieträgerspezifischen Einstands- oder Herstellkosten zu bewerten.
- Die so ermittelten Bruttoeinsparungswerte sind um diejenigen Kosten zu reduzieren, die aus dem Implementieren der Meßgeräte, der Datenerfassung und -auswertung sowie dem Abstellen der Ursachen der Mehrverbräuche resultieren.
- Die derart quantifizierten Nettonutzen sind sodann zu differenzieren, und zwar in Abhängigkeit von den schon vorgesehenen Realisierungen von Meßgeräte-Meßort-Kombinationen.

Die letztgenannte Überlegung impliziert nicht nur außerordentlich hohe Anforderungen an die Differenzierungsfähigkeit des mit einer solchen Problemlösung betrauten Personals. Sie verlangt auch ein Fixieren einer im Prinzip immensen Parametermenge. Diese wäre ggf. in einem multidimensionalen Raster einzufangen, und deren Daten müßten bei jeder Iteration zusammen der der Verbesserungskomponente aus dem Raster abgerufen werden. Alternativ böte sich eventuell noch ein iterationsschritt-spezifisches Generieren dieser Parameter an. Voraussetzung dafür ist, daß es gelingt, die Abhängigkeit der Parameter von den jeweils bereits vorgesehenen Meßkombinationen funktional abzubilden. Das Konzept des Branch and Bound-Algorithmus, nach dem Meßgeräte-Meßort-Kombinationen sukzessiv in die zu ermittelnde Lösung einbezogen werden, dürfte sich mit beiden soeben vorgetragenen Vorschlägen zur Brutto- sowie Nettonutzen-Quantifizierung vertragen.

1) Vgl.

Balas, E.: An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables; in: Operations Research, Vol. 13 (1965), S. 517-546

Lüder, K.: Zur Anwendung neuerer Algorithmen der ganzzahligen linearen Programmierung; in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 39. Jg. (1969), S. 405-434; hier: S. 418 ff.

Neumann, K.: Operations Research Verfahren, Band I, München-Wien 1975, S. 339 ff.

Eiselt, H.A. u. H. von Frajer: Operations Research Handbook, Berlin-New York 1977, S. 129 ff.

Glover, F.: A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem; in: Operations Research, Vol. 13 (1965), S. 879-919 (Fortentwicklung des Balas-Algorithmus)

2) Vgl.

Kolesar, P.J.: A Branch and Bound Algorithm for the Knapsack Problem; in: Management Science, Vol. 13 (1967), S. 723-735

Neumann, K.: a.a.O., S. 357 ff.

3) Vgl.

Bellman, R.: Notes on the Theory of Dynamic Programming IV - Maximization over Discrete Sets; in: Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 3 (1956), S. 67-70

Weingartner, H.M. u. D.N.Ness: Methods for the Solution of the Multidimensional 0/1 Knapsack Problem; in: Operations Research, Vol. 15 (1967), S. 83-103

Gerhardt, C.: Gedanken zur Lösung des Knapsack-Problems; in: Ablauf- und Planungsforschung, 11. Jg. (1970), S. 69-83; hier: S. 70 ff.

Neumann, K.: Operations Research Verfahren, Band II, München-Wien 1977, S. 49 ff.

Eiselt, H. A. u. H. von Frajer: a.a.O., S. 270 ff.

4) Algorithmtypen (speziell für den oben spezifizierten Modelltyp) behandeln:

Greenberg, H. u. R.L. Hegerich: A Branch Search Algorithm for the Knapsack Problem; in: Management Science, Vol. 16 (1970), S. 327-332

Nauss, R.M.: An Efficient Algorithm for the 0-1 Knapsack Problem; in: Management Science, Vol. 23 (1976), S. 27-31

Martello, S. u. P. Toth: Algorithm 37 - Algorithm for the Solution of the 0-1 Single Knapsack Problem; in: Computing, Vol. 21 (1978), S. 81-86

5) Vgl.

Balas, E.: Discrete Programming by the Filter Method; in: Operations Research, Vol. 15 (1967), S. 915-957

Lemke, C.E. u. K. Spielberg: Direct Search Algorithms for Zero-One and Mixed-Integer Programming; in: Operations Research, Vol. 15 (1967), S. 892-914

Lawler, E.L. u. M.D. Bell: A Method for Solving Discrete Optimization Problems; in: Operations Research, Vol. 14 (1966), S. 1098-1112

- 6) Eine Richtungsumkehr ist nicht möglich, da zur Ausnutzung des hier angesprochenen Synergieeffekts eine variable Reduktion des enumerationsrelevanten Suchraums gegenüber dem kombinatorisch möglichen Suchraum notwendig ist. Über diese Suchflexibilität verfügt jedoch nur der Teilalgorithmus der Variante  $VK_4$ , nicht der seines Pendant von  $VK_1$ .
- 7) Auf die Problematik, die geforderte Repräsentativität operational zu definieren und ihre Einhaltung zu gewährleisten, kann hier nur aufmerksam gemacht werden.
- 8) Da eine Zulässigkeitsprüfung jeweils dann beendet wird, wenn die Erfüllung aller Restriktionen nachgewiesen wurde oder aber die erste Verletzung einer Restriktion eingetreten ist, fällt diese Prüfung um so schonender für die Ressourcen aus, je schneller eine Restriktionsverletzung nachgewiesen werden kann. Bei sequentieller Ausführung ist dessen (Zeit-)Effizienz daher auch sensitiv gegenüber der Festlegung der Reihenfolge, in der die Restriktionen hinsichtlich ihrer Erfüllung getestet werden. Bei nebenläufiger Algorithmusausführung durch Parallelrechner tritt zwar diese Reihenfolgesensitivität in den Hintergrund, doch der reale Ressourcenverzehr wird durch die aufwendige Konstruktion eines solchen Rechnerkonzepts erheblich belastet.
- 9) Jeder logarithmisch beschränkte Algorithmus ist mindestens so effizient wie ein polynomial beschränkter: Im oben relevanten Fall der logarithmischen Schranke  $S(L) = \log_2 L$  gilt z. B. für das einfachste Polynomial  $S'(L) = L$  für  $L \rightarrow \infty$  bereits:  $\log_2 L \leq L \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2^{\log_2 L} \leq 2^L \Leftrightarrow L \leq 2^L$ , was zu beweisen war.

ines Algo-  
rithmus

**Verzeichnis der Arbeitspapiere des  
Seminars für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre,  
Industriebetriebslehre und Produktionswirtschaft der  
Universität zu Köln**

(bis Sommer 1986: Seminar für Allgemeine  
Betriebswirtschaftslehre und Fertigungswirtschaft)

---

- Nr. 1: ZELEWSKI,STEPHAN: Entscheidungsmodelle zur Verschrottung von Fertigungshilfsmitteln, Köln 1984.
- Nr. 2: KERN,WERNER; ZELEWSKI,STEPHAN: Ein Zuordnungsmodell für Meßgeräte in Energie-Informationssystemen, Köln 1985.
- Nr. 3: KERN,WERNER; PETERS,ULRICH: Energiebewirtschaftung in industriellen Betrieben - Bericht über eine Befragung, Köln 1985.
- Nr. 4: BOOS,JOCHEN: Lokalisierung von Meßstellen für ein Informations-System zur Energiebewirtschaftung in industriellen Betrieben - Entwicklung eines OR-Modells mit einem Lösungsvorschlag -, Köln 1986.
- Nr. 5: ZELEWSKI,STEPHAN: Ansätze der Künstlichen Intelligenz-Forschung zur Unterstützung der Netzplantechnik, Köln 1986.
- Nr. 6: ZELEWSKI,STEPHAN: Schnittstellen bei betrieblichen Informationssystemen - eine Darstellung aus systemtheoretischer und betriebswirtschaftlicher Sicht -, Köln 1986.
- Nr. 7: ZELEWSKI,STEPHAN: Konzepte für Frühwarnsysteme und Möglichkeiten zu ihrer Fortentwicklung durch Beiträge der Künstlichen Intelligenz, Köln 1986.
- Nr. 8: ZELEWSKI,STEPHAN: Das Konzept der unscharfen Mengen unter besonderer Berücksichtigung ihrer linguistischen Interpretation - eine Lösung für unscharfe Probleme? -, Köln 1986.
- Nr. 9: ZELEWSKI,STEPHAN: Der tau-Wert: Aspekte eines neueren spieltheoretischen Ansatzes zur fairen Preisbildung aus kostenrechnerischer Perspektive, Köln 1986.
- Nr. 10: ZELEWSKI,STEPHAN: Competitive Bidding aus der Sicht des Ausschreibers - ein spieltheoretischer Ansatz -, Köln 1986.
- Nr. 11: ZELEWSKI,STEPHAN: Netztheoretische Ansätze zur Konstruktion und Auswertung von logisch fundierten Problembeschreibungen, Köln 1986.
- Nr. 12: ZELEWSKI,STEPHAN: Netztheoretische Fundierung von parallelen Algorithmen für die Lösung linear-ganzzahliger OR-Modelle, Köln 1986.

- Nr. 13: ZELEWSKI,STEPHAN: Intelligente Informationsbanksysteme - benutzerfreundliche Instrumente für die Informationsvermittlung? -, Köln 1986.
- Nr. 14: ZELEWSKI,STEPHAN: Komplexitätstheorie - ihr Beitrag zur Klassifizierung und Beurteilung von Problemen des Operations Research -, Köln 1986.
- Nr. 15: ZELEWSKI,STEPHAN: Der Informationsbroker, Köln 1986.
- Nr. 16: ZELEWSKI,STEPHAN: Soziale Verantwortbarkeit von Technologien, Köln 1986.
- Nr. 17: ZELEWSKI,STEPHAN: Expertensysteme - Übersicht über Konzeptionen und betriebswirtschaftliche Anwendungsmöglichkeiten -, Köln 1986.
- Nr. 18: ZELEWSKI,STEPHAN: Das Leistungspotential der Künstlichen Intelligenz für Industrieanwendungen - Ein Überblick -, Köln 1987.
- Nr. 19: ZELEWSKI,STEPHAN: Expertensysteme im "Büro der Zukunft" - Ein Überblick über Anwendungsperspektiven und Bewertungsaspekte -, Köln 1987.